ISSN 2074-9414 (Print)
ISSN 2313-1748 (Online)

https://doi.org/10.21603/2074-9414-2024-1-2491
https://elibrary.ru/KCTXZN

Оригинальная статья
https://fptt.ru

Математическая модель процесса СВЧ и конвективной выпечки хлеба из сбивного теста

А. А. Хвостов[1,2], Г. О. Магомедов[2], В. И. Ряжских[1,3], А. А. Журавлев[3], М. Г. Магомедов[2,*], И. В. Плотникова[2], А. С. Таратухин[2]

[1] *Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия*

[2] *Воронежский государственный университет инженерных технологий, Воронеж, Россия*

[3] *Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина» Министерства обороны Российской Федерации, Воронеж, Россия*

Поступила в редакцию: 01.12.2022
Принята после рецензирования: 25.05.2023
Принята к публикации: 06.06.2023

**М. Г. Магомедов: mmg@inbox.ru, https://orcid.org/0000-0003-2494-4973*
А. А. Хвостов: https://orcid.org/0000-0002-3836-9407
Г. О. Магомедов: https://orcid.org/0000-0002-7201-8387
В. И. Ряжских: https://orcid.org/0000-0002-2834-3000
А. А. Журавлев: https://orcid.org/0000-0002-2194-767X
И. В. Плотникова: https://orcid.org/0000-0001-5959-6652
А. С. Таратухин: https://orcid.org/0000-0002-9880-9726

© А. А. Хвостов, Г. О. Магомедов, В. И. Ряжских, А. А. Журавлев, М. Г. Магомедов, И. В. Плотникова, А. С. Таратухин, 2024

Аннотация.
При выпечке сбивных бездрожжевых хлебобулочных изделий актуальным является внедрение эффективных источников подвода энергии к тестовым заготовкам для снижения энергозатрат и продолжительности выпечки, а также для повышения качества изделий. Целью работы являлась формализация математической модели процесса СВЧ и конвективной выпечки хлеба из сбивного теста на основе основных уравнений тепломассообмена и ее верификация.
Для проверки точности расчетов по разработанной математической модели провели натурный эксперимент. Он заключался в оценке нагрева сбивных тестовых заготовок влажностью 56 ± 1 % при СВЧ и конвективной выпечке до достижения температуры в центре мякиша хлеба 98 ± 1 °С.
Математическая модель выпечки формализована в виде уравнений сохранения энергии и массы. Это позволяет рассматривать процесс выпечки хлеба как нестационарный процесс тепло- и массопереноса влаги в изотропной несжимаемой сплошной среде в диффузионном приближении с учетом подвижной границы фазового перехода. Верификация математической модели показала, что оценка средней относительной погрешности составила для СВЧ-выпечки 14,5 % по температуре и 18,2 % по влагосодержанию, для конвективной выпечки 12,6 % по температуре и 9,7 % по влагосодержанию. Проведенные исследования позволили сделать вывод о адекватности математической модели реальным процессам тепломассообмена, а также приемлемой для оптимизации процесса погрешности расчета полей температуры и влагосодержания.
Разработанная физико-математическая модель процесса выпечки позволяет оценить динамику температурных и влагоконцентрационных полей в тестовой заготовке в зависимости от технологических параметров. Математическая модель и результаты вычислительных экспериментов могут быть использованы для идентификации статических и динамических характеристик процесса выпечки как объекта автоматического управления, выявления предпочтительных каналов управления и выбора управляющих воздействий, а также для синтеза системы автоматического управления процессом выпечки по заданным показателям качества.

Ключевые слова. Хлеб, сбивное тесто, хлебный мякиш, хлебная корка, СВЧ-выпечка, конвективная выпечка, тепломассоперенос, математическое моделирование, задача Стефана

Финансирование. Работа выполнена на базе Воронежского государственного университета инженерных технологий (ВГУИТ).

Для цитирования: Математическая модель процесса СВЧ и конвективной выпечки хлеба из сбивного теста / А. А. Хвостов [и др.] // Техника и технология пищевых производств. 2024. Т. 54. № 1. С. 93–103. https://doi.org/10.21603/2074-9414-2024-1-2491

https://doi.org/10.21603/2074-9414-2024-1-2491
https://elibrary.ru/KCTXZN

Original article
Available online at https://fptt.ru/en

Microwave-Convective Processing of Whipped Bread: Mathematical Modeling

Anatoly A. Khvostov[1,2], Gazibeg O. Magomedov[2], Victor I. Ryazhskih[1,3], Aleksey A. Zhuravlev[3], Magomed G. Magomedov[2,*], Inessa V. Plotnikova[2], Aleksei S. Taratukhin[2]

[1] *Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia*

[2] *Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russia*

[3] *Military Educational and Scientific Centre of the Air Force N.E. Zhukovsky and Yu.A. Gagarin Air Force Academy of the Ministry of Defence of the Russian Federation, Voronezh, Russia*

Received: 01.12.2022
Revised: 25.05.2023
Accepted: 06.06.2023

**Magomed G. Magomedov: mmg@inbox.ru, https://orcid.org/0000-0003-2494-4973*
Anatoly A. Khvostov: https://orcid.org/0000-0002-3836-9407
Gazibeg O. Magomedov: https://orcid.org/0000-0002-7201-8387
Victor I. Ryazhskih: https://orcid.org/0000-0002-2834-3000
Aleksey A. Zhuravlev: https://orcid.org/0000-0002-2194-767X
Inessa V. Plotnikova: https://orcid.org/0000-0001-5959-6652
Aleksei S. Taratukhin: https://orcid.org/0000-0002-9880-9726

© A.A. Khvostov, G.O. Magomedov, V.I. Ryazhskih, A.A. Zhuravlev, M.G. Magomedov, I.V. Plotnikova, A.S. Taratukhin, 2024

Abstract.
Whipped yeast-free bakery products require effective energy supply to dough in order to optimize energy consumption, baking time, and quality. This article introduces a verified mathematical model of microwave and convective baking for whipped bread based on heat and mass exchange equations.
A full-scale experiment to verify the calculations involved dough samples with a humidity of 56 ± 1%. The samples underwent microwave and convective processing until the temperature in the crumb center reached 98 ± 1°C.
The mathematical model was formalized as energy and mass conservation equations, which made it possible to consider baking as a non-stationary process of heat and mass transfer of moisture in an isotropic incompressible continuous medium in the diffusion approximation. The equation took into account the unstable phase transition boundary. The practical verification showed the mean error for microwave baking as 14.5% in temperature and 18.2% in moisture content. For convective baking, the results included 12.6% in temperature and 9.7% in moisture content. The mathematical model proved adequate to the real processes of heat and mass transfer. The error in calculating the temperature and moisture content fields was sufficient tooptimize the process.
The physical and mathematical model of the baking process made it possible to evaluate the effect of technological variables on the temperature and moisture concentration fields in the dough samples. The mathematical model and the computational experiment can be used to identify static and dynamic characteristics of baking as an object of automatic control, i.e., to identify optimal control channels and actions, as well as to adjust the automatic control system to specific quality indicators.

Keywords. Bread, aerated dough, bread crumb, bread crusts, microwave baking, convection baking, heat and mass transfer, mathematical modeling, Stefan problem

Funding. The research was performed on the premises of the Voronezh State University of Engineering Technologies (VSUET).

For citation: Khvostov AA, Magomedov GO, Ryazhskih VI, Zhuravlev AA, Magomedov MG, Plotnikova IV, *et al.* Microwave-Convective Processing of Whipped Bread: Mathematical Modeling. Food Processing: Techniques and Technology. 2024;54(1): 93–103. (In Russ.). https://doi.org/10.21603/2074-9414-2024-1-2491

Введение

Процесс выпечки хлебобулочных изделий традиционными способами характеризуется энергозатратами, длительностью технологического процесса, металлоемкостью оборудования и большими производственными площадями [1]. Поэтому актуальной задачей является внедрение эффективных источников подвода энергии к тестовым заготовкам для снижения

энергозатрат и продолжительности, а также для повышения качества при выпечке сбивных бездрожжевых хлебобулочных изделий.

Существуют различные механизмы генерации и подвода тепловой энергии, которая вызывает интенсивный нагрев выпекаемой тестовой заготовки: подвод тепловой энергии извне (радиационно-конвективная выпечка с подводом сухого или увлажненного воздуха); выделение тепла в объеме заготовки (электроконтактный прогрев или прогрев в электрическом поле токов высокой и сверхвысокой частоты (СВЧ)); комбинирование режимов выпечки [2, 3]. В работе Г. О. Магомедова и др. предложен комбинированный СВЧ и конвективный нагревы [4]. Сокращение времени выпечки достигается за счет интенсивного СВЧ-нагрева, а формирование показателей качества хлебобулочных изделий (вкус, запах, цвет, структура корки и мякиша) происходит путем оптимального сочетания интенсивности и продолжительности воздействия СВЧ и конвективного режимов выпечки в одном технологическом цикле.

Для идентификации оптимальных технологических режимов выпечки без использования натурных экспериментов необходима математическая модель процессов тепломассообмена в тестовой заготовке. Данная модель позволяет оценить динамику температурных и влаго-концентрационных полей в тестовой заготовке в зависимости от технологических параметров выпечки (масса и геометрия заготовки, ее начальная температура и влагосодержание, температура в печи, удельная мощность СВЧ-излучения, время выпечки при конвективном, СВЧ или комбинированном режимах).

Основные подходы к построению математических моделей процесса выпечки подробно изложены и систематизированы в работе E. Purlis и др. [5]. Условно их можно разделить на группы:

1. Моделирование сопряженных процессов тепломассопереноса в пористой среде [6, 7]. Может учитываться фазовый переход, механизмы капиллярной и молекулярной диффузии, термодиффузии, многофазное течение в пористой среде (вода, пар, углекислый газ) [8–10];

2. Моделирование сопряженных процессов тепломассопереноса в сплошной среде, которая разделена на две зоны, соответствующие мякишу и корке заготовки. Раздел происходит на линии «фронта кипения» (evaporation front) при 100 °C [11]. В зоне мякиша слабо изменяется влагосодержание и температура асимптотически стремится к 100 °C, в зоне корки влагосодержание мало́, а температура стремится к температуре пекарной камеры. Задача формулируется как тепломассообмен с фазовым переходом с подвижной границей (задача Стефана) [12];

3. Осреднение теплофизических свойств по объему тестовой заготовки дает возможность получить простые математические модели динамики температуры и влагосодержания тестовой заготовки в процессе выпечки относительно интегральных характеристик в виде обыкновенных дифференциальных уравнений, которые могут использоваться для отладки алгоритмов управления процессом выпечки, приближенной оценки продолжительности выпечки или подсистемы в иерархии более сложных математических моделей, включающих в себя пространство пекарной камеры, хлебопекарную форму, под печи и т. д. [13].

Модельное представление процессов тепломассопереноса в тестовой заготовке в ходе выпечки при допущении сплошности сред в области мякиша и корки и их сопряжение, формализованное в виде задачи Стефана, дает соответствие эксперименту и, несмотря на феноменологическое толкование основных теплофизических, массообменных и биохимических процессов, которые протекают в объекте моделирования, отражает основные закономерности процесса выпечки [11, 12].

Этот подход является компромиссом между детализацией теплофизических и биохимических процессов, которые происходят в тестовой заготовке в ходе выпечки, и качественно верным и приемлемым по точности описания экспериментальных данных подходом на основе задачи Стефана.

Целью работы являлась формализация математической модели процесса СВЧ и конвективной выпечки хлеба из сбивного теста на основе основных уравнений тепломассообмена, а также ее верификация.

Объекты и методы исследования

Для проверки точности расчетов по разработанной математической модели провели натурный эксперимент. Он заключается в оценке нагрева сбивных тестовых заготовок влажностью 56 ± 1 % из муки цельносмолотого зерна пшеницы при СВЧ и конвективной выпечке с различной интенсивностью и длительностью нагрева в микроволновой печи марки Panasonic NN-CSS 965 и кондитерской печи с электрообогревом PFS-9E до достижения температуры в центре мякиша хлеба 98 ± 1 °C. Температуру сбивного теста в центре мякиша при его нагреве контролировали с помощью термопары ОВЕН ДТПL054 и регистратора ТРМ-200 через заданные промежутки времени.

Математическая модель процесса выпечки хлеба формализует нестационарный процесс тепло- и массопереноса влаги в изотропной несжимаемой сплошной среде в диффузионном приближении с учетом подвижной границы фазового перехода. Фазовый переход учитывает как баланс тепла, затрачиваемого на испарение, через скачкообразное изменение энтальпии при температуре фазового перехода и соответствующее изменение теплоемкости, так и учет потери массы жидкой фазы в граничном условии уравнения сохранения массы. Предполагается конвективный тепломассообмен и теплообмен излучением в ИК-спектре на границах υ_1, а также температура основания T_{base} и массоизоляция на нижней поверхности заготовки υ_2. Тепловой инерционностью силиконовой формы для выпечки на боковых поверхностях из-за ее малой

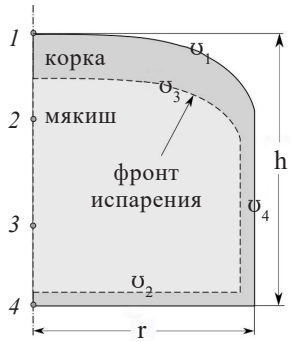


Рисунок 1. Расчетная область моделирования

Figure 1. Computational domain

толщины (0,5 мм) пренебрегаем, на границе υ_4 только конвективный теплообмен и массоизоляция, на нижней поверхности принят идеальный тепловой контакт с поверхностью без учета тепловой инерционности формы. Подвод тепла за счет СВЧ-энергии осуществляется по всему объему заготовки. На рисунке 1 представлена расчетная область моделирования в виде поперечного сечения тестовой заготовки.

Для решения задачи использовали метод сквозного счета, который позволяет не выделять границу раздела фаз и использовать общее уравнение во всей расчетной области с разрывными (эффективными) коэффициентами на межфазных границах.

Результаты и их обсуждение

Математическая модель. Уравнения сохранения энергии и массы при заданных условиях и допущениях принимают вид [14]:

$$\begin{cases} \rho_{\text{eff}}(T)c_{p,\text{eff}}(T)\dfrac{\partial T}{\partial t} = \nabla\cdot k_{\text{eff}}(T)\nabla T + Q_{mw}; \\ \dfrac{\partial W}{\partial t} = \nabla\cdot D_{\text{eff}}(T)\nabla W \end{cases} \quad (1)$$

с начальными условиями:

$$T\big|_{t=0} = T_0,\ W\big|_{t=0} = W_0 \quad (2)$$

с граничными условиями на υ_5:

$$-k_{\text{eff}}(T)\nabla T = \alpha\left(T_{Amb} - T_S\right) + \sigma\varepsilon\left(T_{Amb}^4 - T_S^4\right) \quad (3)$$

$$-D_{\text{eff}}(T)\rho_S\nabla W = \beta\left[W_{Amb}\left(T_{Amb}\right) - W_S\right] \quad (4)$$

на υ_2: $$T = T_{base},\ \frac{\partial W}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (5)$$

на υ_4: $$-k_{\text{eff}}(T)\nabla T = \alpha\left(T_S - T_{Amb}\right),\ \frac{\partial W}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (6)$$

где t – время, с; T – температура, К; W – влагосодержание, безразм.; ρ_{eff} – плотность, кг/м^3; $c_{\rho,\text{eff}}$ – удельная теплоемкость, Дж/(кг·К); k_{eff} – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К); D_{eff} – коэффициент диффузии, м^2/с; T_0 – начальная температура, К; W_0 – начальное влагосодержание, безразм.; α – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м^2·К); T_S, T_{Amb} – температура поверхности заготовки и окружающего воздуха, К; σ – постоянная Стефана-Больцмана, Вт/(м^2·К^4); ε – степень черноты поверхности хлебной заготовки, доля ед.; β – коэффициент массоотдачи, м^2/с; W_S, W_{Amb} – влагосодержание поверхности заготовки и окружающего воздуха, безразм.; $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали к расчетной поверхности, м; Q_L – удельная скрытая теплота парообразования, Дж/м^3; $\frac{\partial\xi}{\partial t}$ – скорость движения границы раздела областей, м/с; Q_{mw} – удельная поглощенная мощность за счет подводимой СВЧ-энергии нагрева, Вт/м^3.

Пренебрегая затуханием электромагнитного поля в нагреваемом образце, удельную поглощенную мощность за счет подводимой СВЧ-энергии нагрева можно записать как [15]

$$Q_{mw} = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon''\omega\left|E\right|^2 \quad (7)$$

где ε_0 – электрическая постоянная, Ф/м ($\varepsilon_0 = 8{,}854\times10^{-12}$ Ф/м); ε'' – коэффициент диэлектрических потерь в материале, безразм.; ω – частота излучения, Гц; E – напряженность электрического поля, В/м.

При выпечке имеет место фазовый переход жидкость-пар. Теплофизические параметры тестовой заготовки при температуре фазового перехода меняются скачкообразно, а функциональные зависимости этих параметров от температуры терпят разрыв. Устранение разрыва и получение гладких аппроксимирующих функций (эффективных коэффициентов) осуществили с помощью модифицированных сглаженных функций Хэвисайда и Дирака [16].

Условие Стефана на границе раздела расчетных областей учитывалось с помощью эффективной теплоемкости среды

$$c_{p,\text{ eff}}(T) = c_p(T) + Q_L\delta\left(T - T^*\right) \quad (8)$$

где T^* – температура перехода, δ – дельта-функция.

Функциональные зависимости для разрывных коэффициентов с использованием значений теплофизических свойств тестовой заготовки в сопрягаемых областях по данным [17, 18]:

$$\rho_{\text{eff}} \approx 180{,}61 + \frac{321{,}31 - 180{,}61}{1 + e^{-8\cdot(T-373{,}15)}} \quad (9)$$

$$k_{\text{eff}} = \frac{0{,}9}{1 + e^{-0{,}1(T-353{,}16)}}\times\tilde{\theta}(T) + 0{,}2 \quad (10)$$

$$c_{p,\text{eff}} = 5T + 5 + 1000W\left(5{,}207 - 73\times10^{-4}T + \right.$$
$$\left. + 1{,}35\times10^{-5}T^2\right) + WQ_L\tilde{\delta}\left(T - T^*\right) \quad (11)$$

$$D_{\text{eff}}(T) = 1\times10^{-10} + \frac{f_{crust}\,2{,}28\times10^{-5}\left(\frac{T}{273}\right)^{1.8} - 1\times10^{-10}}{1+e^{-8\cdot\left[T-T^{*}\right]}} \quad (12)$$

где f_{crust} – коэффициент, характеризующий снижение диффузии в корке; $\tilde{\theta}(T)$ – модифицированная «сглаженная» функция Хэвисайда:

$$\tilde{\theta}(T) = \theta_{Up} + \frac{\theta_{Low} - \theta_{Up}}{1+e^{-2s\left(T-T^{*}\right)}} \quad (13)$$

где θ_{Low}, θ_{Up} – верхнее и нижнее значения функции, «сглаженная» δ-функция

$$\tilde{\delta}(T) = \frac{k_{norm}}{d\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(T-T^{*}\right)^{2}}{2d^{2}}} \quad (14)$$

где s, d – характеристика ширины транзитного перехода; k_{norm} – коэффициент нормировки.

Разработанная математическая модель позволила оценить динамику температурных и влаго-концентрационных полей в тестовой заготовке, их зависимость от технологических параметров выпечки (массы и геометрии заготовки, ее начальной температуры и влагосодержания, температуры в печи, удельной мощности СВЧ-излучения, времени выпечки при конвективном, СВЧ или комбинированном режимах).

Массу заготовки m оценивали по начальной массе, а также по начальному и текущему среднеинтегральному объему влагосодержания тестовой заготовки

$$m = m_{init}\left(\frac{1-W_0}{1-\bar{W}}\right) \quad (15)$$

где $\bar{W} = \frac{1}{V}\int_V W(x,y,z)\,dxdydz$;

m_{init} – начальная масса тестовой заготовки, кг; V – объем заготовки, м^3.

Вычислительные эксперименты. Для верификации разработанной математической модели провели вычислительные эксперименты в среде ComsolMultiphysics. Для решения системы дифференциальных уравнений использовали адаптивную сетку размером порядка 5000 элементов, метод конечных элементов и прямой решатель на основе алгоритма PARADISO.

Моделирование СВЧ-режима выпечки (вычислительный эксперимент № 1). В качестве контролируемых параметров приняты температура и влагосодержание, значения которых оценивались в контрольных точках: *1* – верхняя поверхность тестовой заготовки (корка); *2* – верхняя часть мякиша; *3* – нижняя часть мякиша; *4* – точка на расстоянии 1 мм от нижней точки тестовой заготовки (рис. 2). Исходные данные для моделирования приведены в таблице 1. Изменение

Таблица 1. Исходные данные вычислительного эксперимента № 1

Table 1. Computational experiment 1: input data

№ п/п	Параметр	Значение	Единица измерения
1	Радиус заготовки, r	60	мм
2	Высота заготовки, h	65	мм
3	Начальное влагосодержание	0,56	безразм.
4	Мощность СВЧ-нагрева	400	Вт
5	Масса	0,500	кг

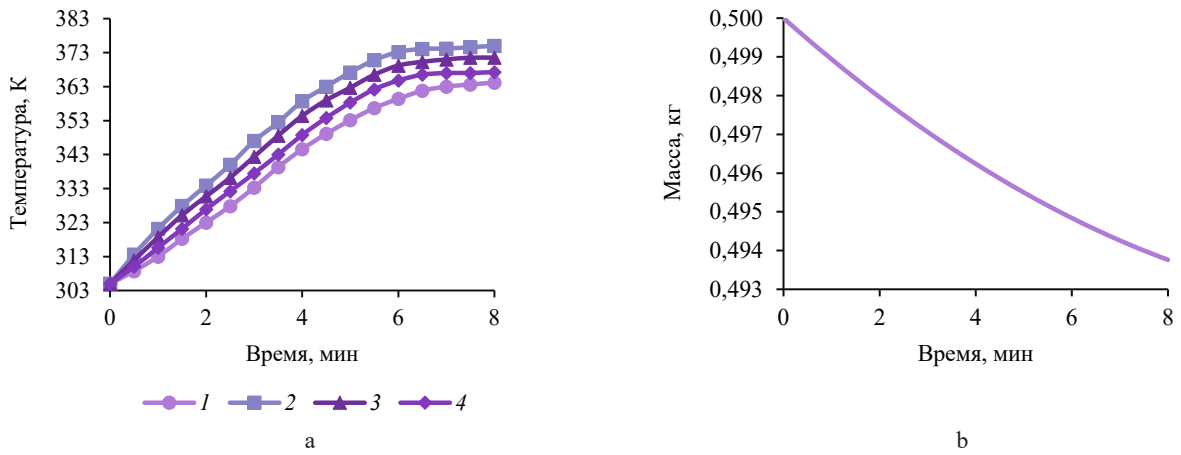


Рисунок 2. Изменение температуры тестовой заготовки в контрольных точках (a) и массы тестовой заготовки (b)

Figure 2. Dough temperatures at check points (a); dough mass (b)

температурного поля и поля влагосодержания при СВЧ-выпечке представлены на рисунке 3.

Представленные данные по СВЧ-нагреву согласуются с экспериментальными данными, представленными в литературе [15, 19].

Из графиков изменения температуры тестовой заготовки в контрольных точках видно, что разработанная математическая модель СВЧ-выпечки тестовых заготовок качественно верно описывает основные закономерности процесса. Также характер изменения температуры близок к линейному и происходит в контрольных точках с практически идентичной скоростью (рис. 2a). Рост температуры замедляется в области фронта испарения, где начинается поглощение тепла, необходимого для фазового перехода «вода-пар» (рис. 2a). По мере прогрева заготовки пространственная неоднородность температуры увеличивается. Это обусловлено повышением интенсивности охлаждающего конвективного теплообмена с окружающим воздухом за счет возрастающего температурного градиента. Центр тестовой заготовки прогревается быстрее за счет его отдаленности от поверхности, которая граничит с окружающим более холодным воздухом (рис. 2a). Снижение массы заготовки происходит практически линейно, но наблюдается небольшое снижение скорости убыли массы в ходе процесса выпечки (рис. 2b). Из графиков изотерм (рис. 3a и c) видно, что фронт испарения (100 °C) формируется в центре тестовой заготовки и перемещается к поверхности, не формируя область корки с низким влагосодержанием (рис. 3b и d).

Моделирование конвективного режима выпечки (вычислительный эксперимент № 2). Контроль тем-

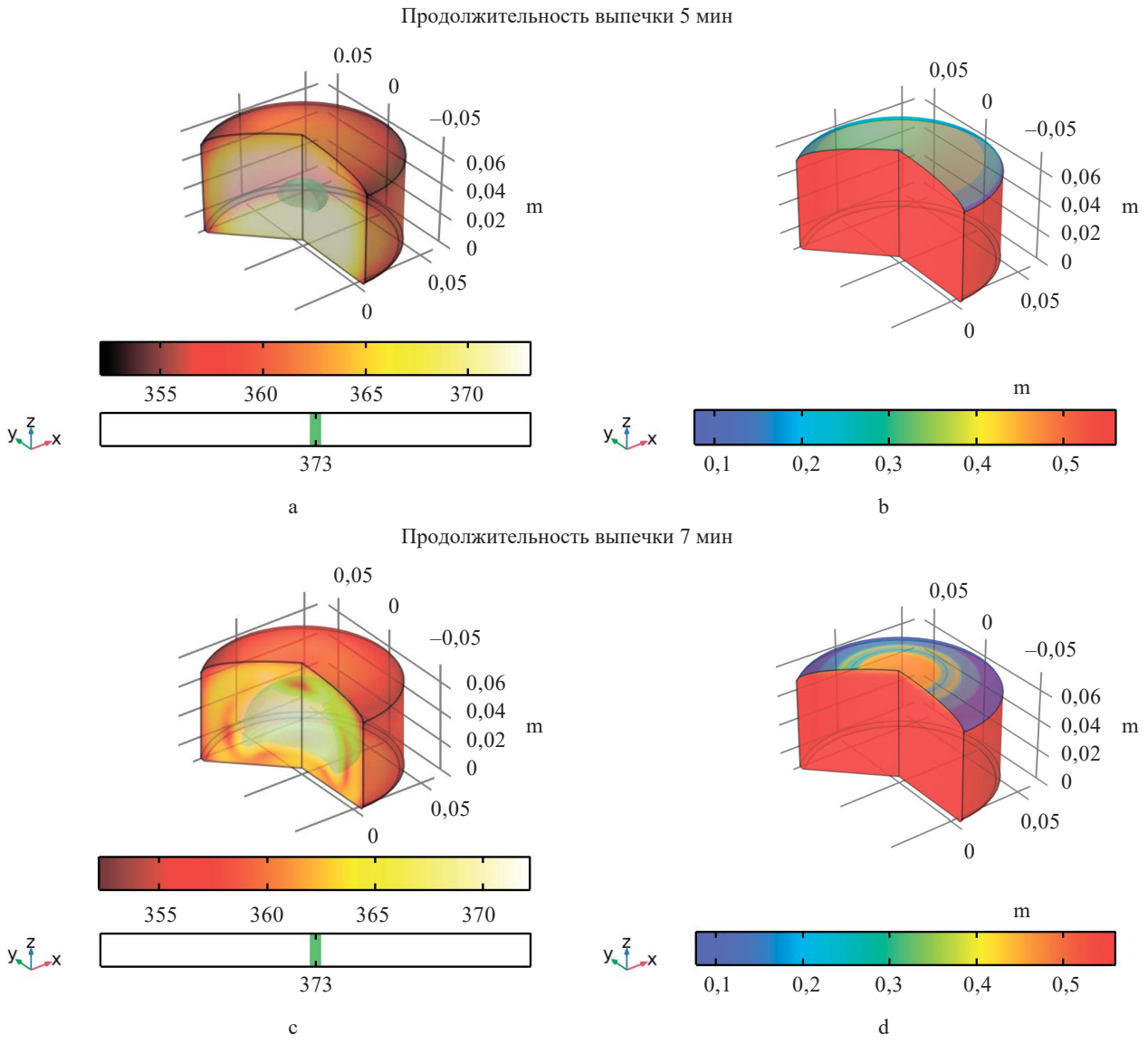


Рисунок 3. Изменение температурного поля (a и c) и поля влагосодержания (b и d) при СВЧ-выпечке

Figure 3. Temperature (a, c) and moisture (b, d) during microwave baking

пературы осуществлялся в тех же контрольный точках тестовой заготовки, что и в эксперименте № 1 (рис. 4). Исходные данные для моделирования приведены в таблице 2. На рисунке 5 представлены результаты изменения температурного поля и поля влагосодержания при конвективной выпечке.

Результаты вычислительных экспериментов конвективного нагрева согласуются с экспериментальными данными, представленными в работах [8–13, 17, 18, 20].

Из графиков изменения температуры тестовой заготовки в контрольных точках видно, что разработанная математическая модель конвективной выпечки тестовых заготовок качественно верно описывает основные закономерности процесса. Температура в центре заготовки до 15 мин выпечки практически не увеличивается. Это связано с начальной стадией формирования градиента температур по толщине заготовки. В интервале от 15 до 35 мин наблюдается характерный рост температуры в центре тестовой заготовки, обусловленный ее прогревом за счет сформировавшегося температурного градиента (рис. 4a). Затем рост температуры прекращается, т. к. ее значение приближается к температуре испарения воды, где начинается поглощение тепла, необходимого для фазового перехода «вода-пар» (рис. 4a). Наблюдается монотонное уменьшение массы заготовки, вызванное диффузией влаги за пределы тестовой заготовки (рис. 4b). На поверхности тестовой заготовки в первую минуту нагрева происходит резкий рост температуры за счет большого температурного напора. После прогрева поверхности и подповерхностной области температурный напор снижается. Дальнейшее изменение температуры носит квазилинейный характер (рис. 4a). Из графиков (рис. 5a и c) видно, что фронт испарения (100 °C) формируется на поверхности тестовой заготовки и перемещается вглубь, моделируя область корки с низким влагосодержанием (рис. 5b и d).

Вычислительный эксперимент № 3 заключался в верификации математической модели на основе данных натурного эксперимента (табл. 3, рис. 6–9).

Представленная математическая модель позволяет моделировать различные сочетания этапов выпечки, достигая необходимого эффекта. Оценка средней относительной погрешности составила для СВЧ-выпечки 14,5 % по температуре и 18,2 % по влагосодержанию, для конвективной выпечки 12,6 % по температуре и 9,7 % по влагосодержанию. Проведенные исследования позволили сделать вывод об адекватности математической модели реальным процессам тепломассообмена, а также о приемлемой для оптимизации процесса погрешности расчета полей температуры и влагосодержания.

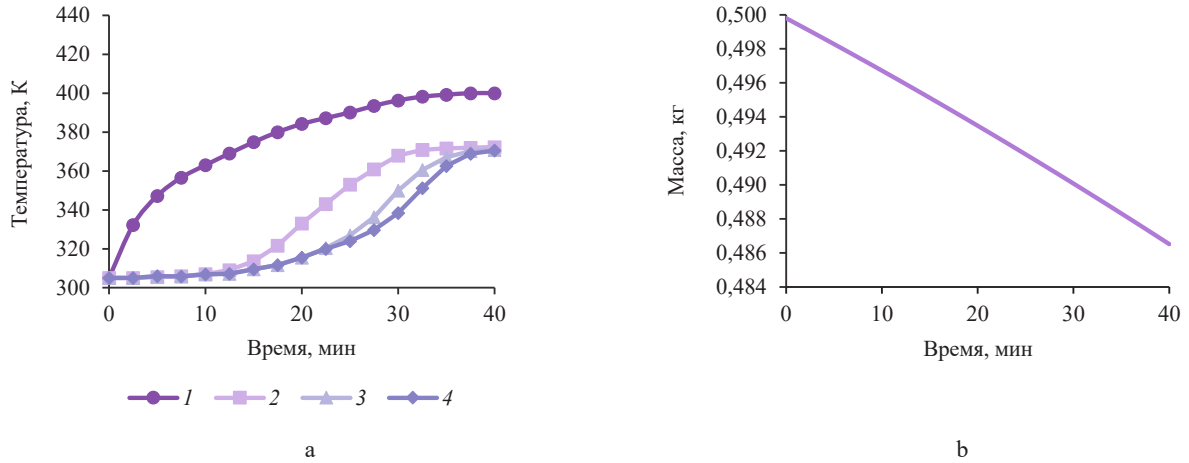


Рисунок 4. Изменение температуры тестовой заготовки в контрольных точках (a) и массы тестовой заготовки (b)

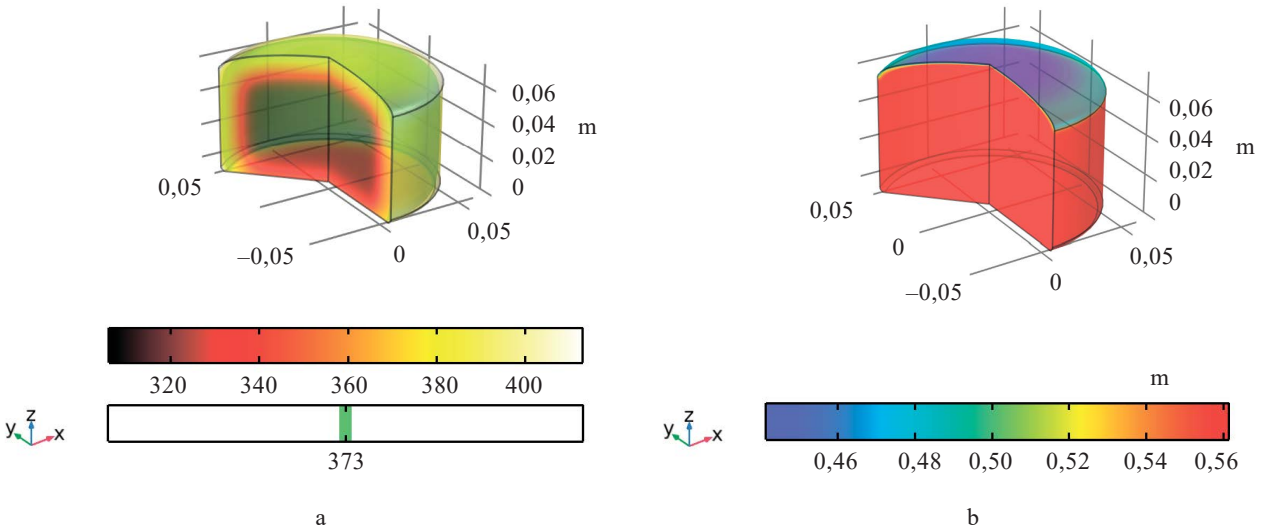
Figure 4. Dough temperatures at check points (a); dough mass (b)

Таблица 2. Исходные данные вычислительного эксперимента № 2

Table 2. Computational experiment 2: input data

№ п/п	Параметр	Значение	Единица измерения
1	Радиус заготовки	60	мм
2	Высота заготовки	65	мм
3	Начальное влагосодержание	0,56	безразм.
4	Температура в пекарной камере	493	К
5	Масса	0,500	кг

Продолжительность выпечки 20 мин



Продолжительность выпечки 35 мин

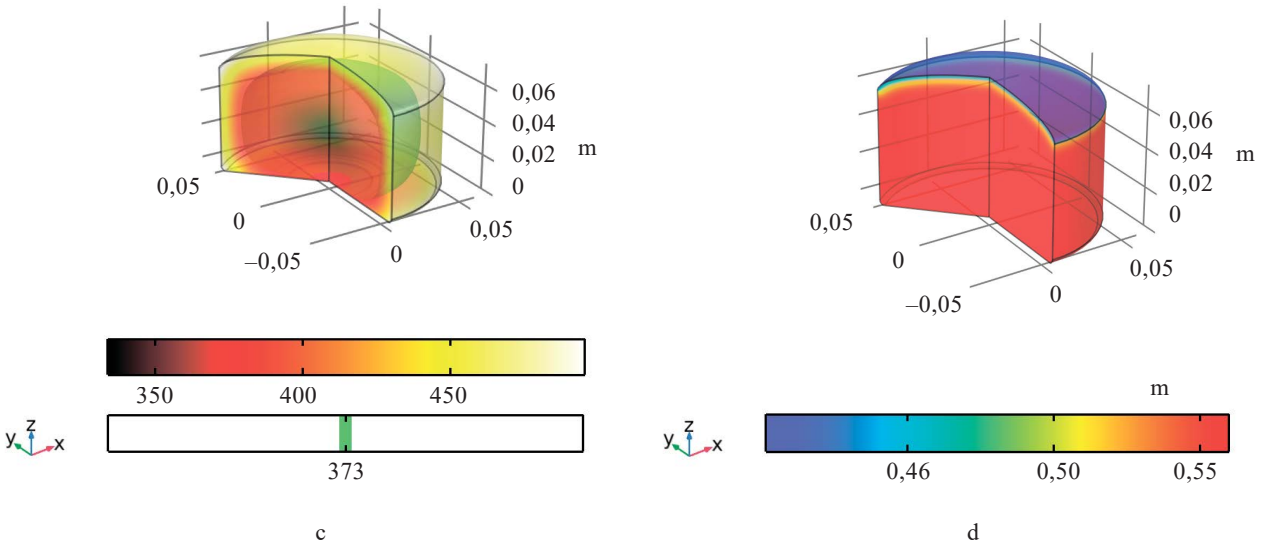


Рисунок 5. Изменение температурного поля (a и c) и поля влагосодержания (b и d) при конвективной выпечке

Figure 5. Temperature (a, c) and moisture (b, d) during convective baking

Таблица 3. Исходные данные вычислительного эксперимента № 3

Table 3. Computational experiment 3: input data

№ п/п	Параметр	Значение	Единица измерения
1	Радиус заготовки	60	мм
2	Высота заготовки	65	мм
3	Начальное влагосодержание	0,56	безразм.
5	Мощность СВЧ-излучателя	400 1000	Вт
6	Температура в пекарной камере	453 493	К
7	Масса	0,5	кг

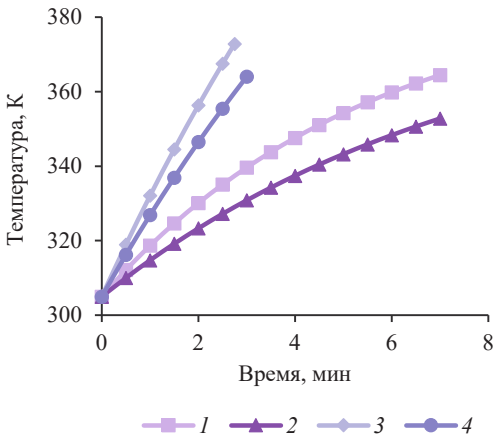


Рисунок 6. Изменение температуры при мощности СВЧ-нагрева: *1* – мякиш, 400 Вт; *2* – корка, 400 Вт; *3* – мякиш, 1000 Вт; *4* – корка, 1000 Вт (графические пиктограммы – экспериментальные значения)

Figure 6. Temperatures during microwave processing: *1* – crumb, 400 W; *2* – crust, 400 W; *3* – crumb, 1,000 W; *4* – crust, 1,000 W; pictograms illustrate experimental values

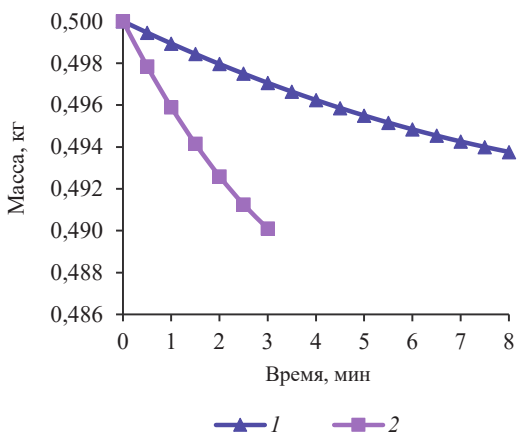


Рисунок 7. Изменение массы тестовой заготовки при мощности СВЧ-нагрева: *1* – 400 Вт; *2* – 1000 Вт (графические пиктограммы – экспериментальные значения)

Figure 7. Dough mass during microwave processing: *1* – 400 W; *2* – 1,000 W; pictograms illustrate experimental values

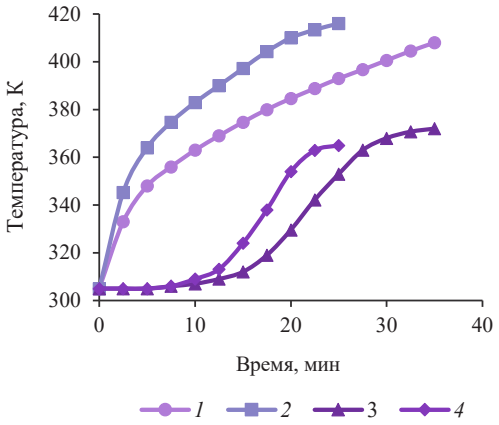


Рисунок 8. Изменение температуры при конвективном нагреве: *1* – корка, 453 К; *2* – корка, 493 К; *3* – мякиш, 453 К; *4* – мякиш, 493 К (графические пиктограммы – экспериментальные значения)

Figure 8. Temperature during convective heating: *1* – crust, 453 K; *2* – crust, 493 K; *3* – crumb, 453 K; *4* – crumb, 493 K; pictograms illustrate experimental values

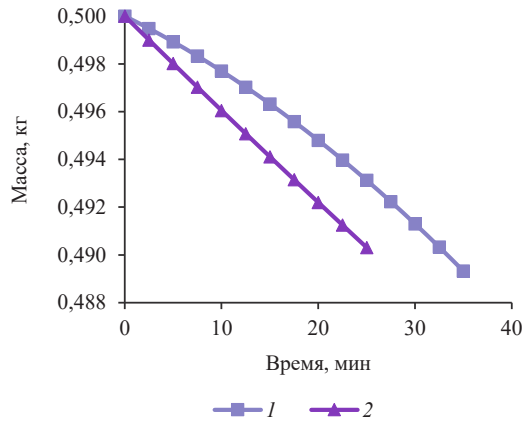


Рисунок 9. Изменение массы тестовой заготовки при конвективном нагреве: *1* – 453 К; *2* – 493 К (графические пиктограммы – экспериментальные значения)

Figure 9. Dough mass during convective heating: *1* – 453 K; *2* – 493 K; pictograms illustrate experimental values

Выводы

Разработали физико-математическую модель процесса СВЧ и конвективной выпечки сбивного бездрожжевого хлебобулочного изделия. Данная модель отличается учетом СВЧ и конвективного подвода энергии, введением двух сопряженных областей мякиша и корки, разделенных границей фазового перехода, для которых решалась задача тепломассопереноса с подвижной границей раздела фаз, и эффективных теплофизических параметров, сопрягаемых на границе «сглаженными» функциями Хэвисайда на основе логистической функции, а также скачка теплоемкости, формализованного «сглаженной» дельта-функцией на основе функции Гаусса.

Разработанная физико-математическая модель процесса СВЧ и конвективной выпечки сбивного бездрожжевого хлебобулочного изделия позволяет оценить динамику температурных и влаго-концентрационных полей в тестовой заготовке в зависимости от технологических параметров выпечки (массы и геометрии заготовки, ее начальной температуры и влагосодержания, температуры в печи, удельной мощности СВЧ-излучения,

времени выпечки при СВЧ и конвективном режимах). Это позволит идентифицировать технологические режимы, оптимальные в плане времени выпечки или энергетических затрат, в СВЧ и конвективном режимах без использования натурных экспериментов.

Математическая модель и результаты вычислительных экспериментов могут быть использованы для идентификации статических и динамических характеристик процесса выпечки как объекта автоматического управления, выявления предпочтительных каналов управления и выбора управляющих воздействий, а также для синтеза системы автоматического управления процессом выпечки по заданным показателям качества.

Критерии авторства

Авторы в равной степени участвовали в подготовке и написании статьи.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарность

Авторы выражают благодарность руководству АО «Хлебозавод № 7» (Воронеж) за предоставленную возможность проведения научного эксперимента в межрегиональном научно-исследовательском центре инновационных технологий хлебопечения.

Contribution

All the authors bear equal responsibility for the content of the article.

Conflict of interest

The authors declare that there is no conflict of interest regarding the publication of this article.

Acknowledgements

The authors express their gratitude to the management of bakery plant Khlebozavod No. 7, Voronezh, for the access to the Interregional Research Center for Innovative Baking Technologies.

References

1. Rudnev SD, Shevchenko TV, Ustinova YuV, Kryuk RV, Ivanov VV, Chistyakov AM. Technology and theory of mechanically activated water in bakery industry. Food Processing: Techniques and Technology. 2021;51(4):768–778. (In Russ.). https://doi.org/10.21603/2074-9414-2021-4-768-778

2. Kulishov BA, Novosyolov AG, Ivashchenko SYu, Gusarov NE. Electric contact heating in baking: A review. Polzunovsky Vestnik. 2019;(1):106–113. (In Russ.). https://doi.org/10.25712/ASTU.2072-8921.2019.01.020

3. Maklyukov VI. Analysis of methods for modeling the bread baking process. Bread Products. 2021;(7):26–32. (In Russ.). [Маклюков В. И. Анализ методов моделирования процесса выпечки хлеба // Хлебопродукты. 2021. № 7. С. 26–32.]. https://elibrary.ru/IQUUCR

4. Magomedov GO, Khvostov AA, Zhuravlev AA, Magomedov MG, Taratukhin AS, Plotnikova IV. Formation of whipped yeast-free bread crumb with intensive microwave convective baking. Food Processing: Techniques and Technology. 2022;52(3):426–438. (In Russ.). https://doi.org/10.21603/2074-9414-2022-3-2375

5. Purlis E, Cevoli C, Fabbri A. Modeling volume change and deformation in food products/processes: An overview. Foods. 2021;10(4). https://doi.org/10.3390/foods10040778

6. Houšová J, Hoke K. Temperature profiles in dough products during microwave heating with susceptors. Czech Journal of Food Sciences. 2002;20(4):151–160. https://doi.org/10.17221/3526-CJFS

7. Kristiawan M, Valle GD, Kansou K, Ndiaye A, Vergnes B. Validation and use for product optimization of a phenomenological model of starch foods expansion by extrusion. Journal of Food Engineering. 2018;246:160–178. https://doi.org/10.1016/j.jfoodeng.2018.11.006

8. Roohi R, Hashemi SMB. Experimental, heat transfer and microbial inactivation modeling of microwave pasteurization of carrot slices as an efficient and clean process. Food and Bioproducts Processing. 2020;121:113–122. https://doi.org/10.1016/j.fbp.2020.01.015

9. Pham ND, Khan MIH, Karim MA. A mathematical model for predicting the transport process and quality changes during intermittent microwave convective drying. Food Chemistry. 2020;325. https://doi.org/10.1016/j.foodchem.2020.126932

10. Purlis E. Modeling convective drying of foods: A multiphase porous media model considering heat of sorption. Journal of Food Engineering. 2019;263:132–146. https://doi.org/10.1016/j.jfoodeng.2019.05.028

11. Salah K, Olkhovatov EA, Aïder M. Effect of canola proteins on rice flour bread and mathematical modelling of the baking process. Journal of Food Science and Technology. 2019;56(8):3744–3753. https://doi.org/10.1007/s13197-019-03842-2

12. Garg A, Malafronte L, Windhab E. Baking kinetics of laminated dough using convective and microwave heating. Food and Bioproducts Processing. 2019;115:59–67. https://doi.org/10.1016/j.fbp.2019.02.007

13. Purlis E. Simple methods to predict the minimum baking time of bread. Food Control. 2019;104:217–223. https://doi.org/10.1016/j.foodcont.2019.04.021

14. Mosalam H. Digital modeling of heat transfer during the baking process. Modelling and Simulation in Engineering. 2021;2021. https://doi.org/10.1155/2021/8957148

15. Hou L, Li R, Wang S, Datta AK. Numerical analysis of heat and mass transfers during intermitten microwave drying of Chinese jujube (Zizyphus jujuba Miller). Food and Bioproducts Processing. 2021;129:10–23. https://doi.org/10.1016/j.fbp.2021.06.005

16. Schiano Di Cola V, Cuomo S, Severino G. Remarks on the numerical approximation of Dirac delta functions. Results in Applied Mathematics. 2021;12. https://doi.org/10.1016/j.rinam.2021.100200

17. Dien Vu K, Bazhenova S. Modeling the influence of input factors on foam concrete properties. Magazine of Civil Engineering. 2021;(3). https://doi.org/10.34910/MCE.103.11

18. Purlis E. Simple methods to predict the minimum baking time of bread. Food Control. 2019;104:217–223. https://doi.org/10.1016/j.foodcont.2019.04.021

19. Thuengtung S, Ogawa Y. Comparative study of conventional steam cooking and microwave cooking on cooked pigmented rice texture and their phenolic antioxidant. Food Science and Nutrition. 2020;8(2):965–972. https://doi.org/10.1002/fsn3.1377

20. Al-Nasser M, Fayssal I, Moukalled F. Numerical simulation of bread baking in a convection oven. Applied Thermal Engineering. 2020;184. https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2020.116252