УДК 637.1/3.(045)

А.С. Бредихин, В.В. Червецов

ОСОБЕННОСТИ ОХЛАЖДЕНИЯ МОЛОЧНОЙ СЫВОРОТКИ ПРИ ПОТОЧНОЙ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ ЛАКТОЗЫ

Статья посвящена исследованию теплопередачи при охлаждении молочной сыворотки. Охлаждение молочной сыворотки – это один из основных процессов, влияющих на кристаллизацию в ней лактозы. Проведено аналитическое исследование изменения температуры молочной сыворотки во взаимосвязи с ее вязкостными свойствами при охлаждении в пластинчатом скребковом теплообменнике непрерывного действия. Распределение температуры продукта в аппарате изучено с помощью дифференциальных уравнений теплопереноса в движущихся жидких средах для цилиндрической системы координат при асимметричном распределении температуры без учета диссипации энергии. Определено изменение температуры во взаимосвязи с реологическими свойствами молочной сыворотки. Получены результаты для практического использования.

Молочная сыворотка, охлаждение, реологические свойства, кристаллизация лактозы, теплообменник непрерывного действия.

Введение

Увеличение объёмов производства молокосодержащих консервов с сахаром повышает актуальность исследований, оправленных на интенсификацию процессов кристаллизации лактозы и создания новых способов и аппаратурного оформления для улучшения качества готового продукта и снижения затрат при его производстве.

Для создания поточных энерго- и ресурсосберегающих линий кристаллизации лактозы в ГНУ ВНИМИ молочной промышленности разработаны способы поточной кристаллизации лактозы. Эти способы позволяют интенсифицировать процесс и улучшить качество готовой продукции.

Объект и методы исследования

Один из способов основан на использовании в качестве охладителя-кристаллизатора пластинчатого скребкового теплообменника. На рис. 1 представлена принципиальная схема и общий вид установки на основе пластинчатого скребкового теплообменника для поточной кристаллизации лактозы в сгущённой молочной сыворотке. Установка работает следующим образом. Сгущенная молочная сыворотка с температурой 55–60 °С поступает в приемную ёмкость, откуда насосом подается в первую секцию пластинчатого скребкового теплообменника, где охлаждается до температуры массовой кристаллизации лактозы, затем поступает в дисковый обработник. Обработник представляет собой дисковый роторно-пульсационный аппарат, состоящий из набора подвижных и неподвижных дисков. Подвижные диски снабжены выступами со специальными проточками, обеспечивающими кавитационный режим течения. Перед дисковым обработчиком в поток продукта через струйный смеситель насосом-дозатором впрыскивается взвесь затравки, которая дисковым обработчиком гарантированно распределяется по всему объёму продукта, при этом подвергая его интенсивному гидродинамическому воздействию. Охлажденный во II секции теплообменника до конечной температуры продукт поступает в буферную ёмкость и затем на фасовку.

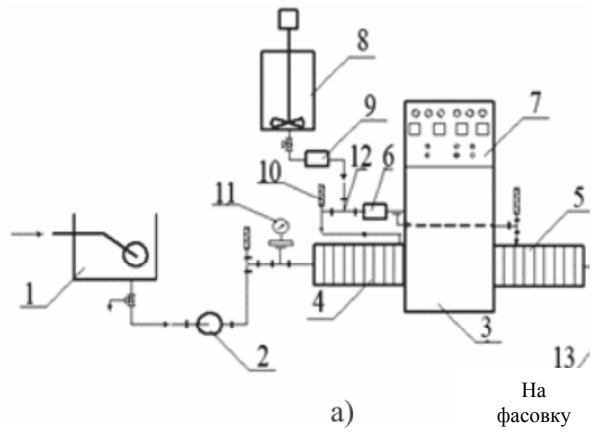

Рис. 1. Установка для поточной кристаллизации лактозы: а – принципиальная схема, б – общий вид: 1 – приёмная ёмкость, 2 – насос подачи продукта, 3 – пластинчатый скребковый теплообменник, 4 – I секция охлаждения, 5 – II секция охлаждения, 6 – дисковый обработник, 7 – щит управления, 8 – ёмкость для затравки, 9 – насос-дозатор, 10 – термометры сопротивления, 1 1 – манометр с разделительной мембраной, 12 – струйный смеситель, 13 – буферная ёмкость

Одним из основных процессов, влияющим на кристаллизацию лактозы в сгущенной молочной сыворотки, является охлаждение. Поточная кристаллизация лактозы развивается в широком температурном диапазоне и изменяющейся вязкости молочной сыворотки и т.п. [1, 4, 6, 7]. Авторами проведено аналитическое исследование изменения температуры молочной сыворотки во взаимосвязи с её вязкостными свойствами при охлаждении в пластинчатом скребковом теплообменнике непрерывного действия.

Скребковый теплообменник представляет собой набор чередующихся теплообменных и так называемых продуктовых пластин, установленных и зажатых на специальных штангах. Основные элементы скребкового теплообменника показаны на рис. 2.

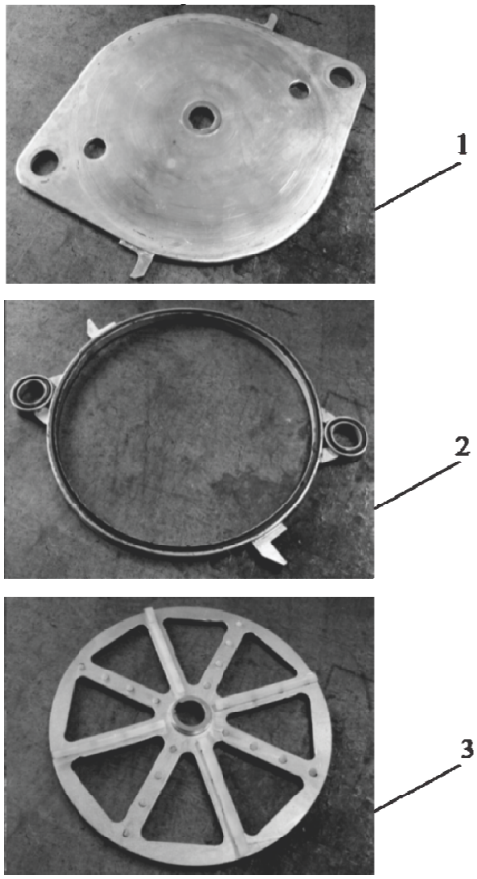

Рис. 2. Элементы пластинчатого скребкового теплообменника:
1 – продуктовая пластина; 2 – уплотнительное кольцо; 3 – скребок-мешалка

Целью данного исследования является определение изменения температуры продукта и хладоносителя молочной сыворотки при её охлаждении для поточной кристаллизации лактозы. Расчётная схема приведена на рис. 3. Поскольку канал для течения молочной сыворотки имеет довольно сложную форму, то для аналитического исследования сделаем ряд упрощений, не сильно искажающих реальную картину.

Результаты и их обсуждение

Распределение температуры продукта в охлаждающем элементе изучали с помощью дифференциальных уравнений теплопереноса в движущихся жидких средах, записанных в цилиндрической системе координат при осесимметричном распределении температуры, без учета диссипации энергии

$$v_r \frac{\partial T}{\partial r} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right), \qquad (1)$$

где T – температура, в точках продукта, °С ; r и z – цилиндрические координаты точки продукта, v_r и v_z – проекции скорости точек продукта на оси r и z, a – коэффициент температуропроводности.

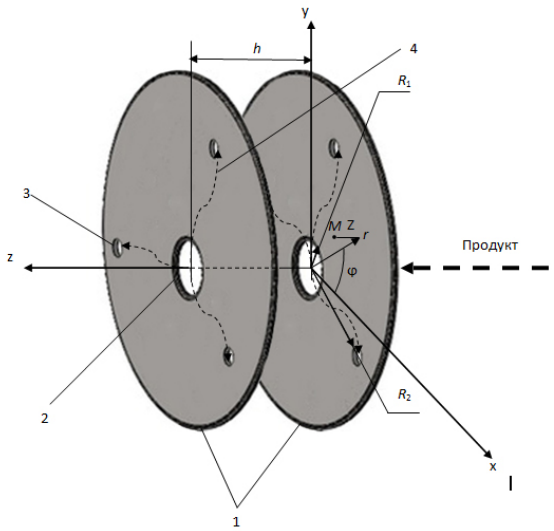

Рис. 3. Расчётная схема:
1 – продуктовые пластины; 2 – центральное отверстие; 3 – периферийные отверстия; 4 – линии тока продукта

Полагаем, что осевая скорость продукта v_z значительно меньше радиальной v_r и окружной v_φ скоростей, поэтому в уравнении (1) положим $v_z \frac{\partial T}{\partial z} \approx 0$. Для определения радиальной скорости v_r воспользуемся дифференциальным уравнением стационарного осесимметричного стационарного течения сплошной среды в напряжениях [2] в проекции на радиальное направление r, полагая в нем реологические константы и плотность продукта ρ не зависящими от температуры для данной пары продуктовых пластин.

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} = F_r + \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\varphi\varphi}}{r}\right\}, \qquad (2)$$

где τ_{rr}, $\tau_{\varphi\varphi}$ – нормальные напряжения на площадках, перпендикулярных соответственно радиальной

r и окружной φ осям, τ_{rz} – касательное напряжение на площадках, перпендикулярных осям r и z.

Реологические исследования молочной сыворотки позволяют с большой точностью принять в качестве ее реологической модели степенную модель Оствальда – Де Виля, что подтверждается также исследованиями Е.А. Чеботарева, П.Г. Нестеренко и Л.Е. Давыдянц [3]. Для такой модели компоненты тензора напряжений, входящие в уравнение (1), при сделанных ранее предположениях в соответствии с основными положениями теории З.П. Шульмана [5] о конвективном теплопереносе реологически сложных жидкостей, имеют вид

$$\tau_{rr} = -p + 2k|H|^{n-1}\frac{\partial v_r}{\partial r},\ \tau_{\varphi\varphi} = -p + 2k|H|^{n-1}\frac{v_r}{r}, \quad (3)$$

$$\tau_{rz} = k|H|^{n-1}\frac{\partial v_r}{\partial z},$$

где k и n – реологические константы молочной сыворотки, H – интенсивность скоростей деформации равная

$$H = \sqrt{\frac{1}{6}\left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{v_r}{r}\right)^2 + \left(-\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2\right] + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)^2}, \quad (4)$$

Величина $k\,H^{n-1}$ может рассматриваться как некоторая кажущаяся (эффективная) вязкость.

Уравнение неразрывности (несжимаемости), справедливое для любой жидкой среды при сделанных предположениях, имеет вид

$$\frac{\partial(r\,v_r)}{\partial r} = 0. \quad (5)$$

Интегрируя уравнение (5), находим

$$v_r = \frac{1}{r}f(z). \quad (6)$$

Температуру в продукте определяем по уравнению (1) с учетом $v_z\frac{\partial T}{\partial z} \approx 0$. Для этого подставим в левую часть данного уравнения выражение радиальной скорости (6) и разделим его левую и правую части на коэффициент температуропроводности a. После этого получим

$$\frac{f(z)}{r}\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (7)$$

Поскольку точного аналитического решения данного уравнения получить нельзя, воспользуемся приближенным решением, заключающимся в частичном осреднении его конвективной части (левая часть уравнения) по толщине зазора между дисками и использовании метода последовательных приближений. Для этого в левой части равенства (7) положим $f(z) \approx \overline{f(z)} = \frac{2}{h}\int_0^{h/2} f(z)dz$. Функция $f(z)$, учитывающая разность давления и вязкостные свойства молочной сыворотки, получена авторами ранее при исследовании гидродинамики пластинчатого скребкового теплообменника при поточной кристаллизации лактозы. Она имеет вид

$$f(z) = -\left[-\frac{(p_1 - p_2)(1-n)}{k\left(R_2^{1-n} - R_1^{1-n}\right)}\right]^{\frac{1}{n}}\frac{n}{n+1}\left[\left(\frac{h}{2} - z\right)^{\frac{n+1}{n}} - \left(\frac{h}{2}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]. \quad (8)$$

Проинтегрировав функцию $f(z)$ (8) в пределах от 0 до $\frac{h}{2}$, находим

$$\overline{f(z)} = \frac{2n}{2n+1}\left(\frac{h}{2}\right)^{\frac{n+1}{n}}\left[\frac{(p_1 - p_2)(1-n)}{k\left(R_2^{1-n} - R_1^{1-n}\right)}\right]^{\frac{1}{n}}. \quad (9)$$

Таким образом, уравнение (7) заменится приближенным уравнением, приведенным к стандартной форме

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}(1 - B) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \quad (10)$$

где через B обозначена величина $\overline{f(z)}$ из (9), деленная на a, т. е.

$$B = \frac{\overline{f(z)}}{a}. \quad (11)$$

Данное уравнение (10) решаем при следующих граничных условиях:

$$r = R_1,\ T = T_1,\ z = 0,\ T = T_3,\ z = h,\ T = T_4, \quad (12)$$

где T_3 и T_4 – температуры продукта на стенках дисков.

Решение линейного уравнения (10) найдем методом разделения переменных, добавив к его общему решению частное решение специального вида.

Перейдя в уравнении (10) к безразмерным величинам, получим

$$\frac{h^2}{R_2^2}\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \overline{r}^2} + \frac{(1-B)h^2}{R_2^2}\frac{1}{\overline{r}}\frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{r}} + \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \overline{z}^2} = 0. \quad (13)$$

Проведя оценку порядка слагаемых в этом уравнении, при соотношениях между размерными и безразмерными величинами

$$T = T_0\,\overline{T},\quad r = R_2\,\overline{r},\quad z = h\,\overline{z}, \quad (14)$$

где T_0 – характерная размерная величина искомой функции, $\overline{T}$ – безразмерная искомая функция, $\overline{r}$ – безразмерная радиальная координата, R_2 – характерный радиальный размер, $\overline{z}$ – безразмерная осевая координата. В качестве характерной осевой координаты взято расстояние h между дисками.

Таким образом, в безразмерном уравнении (13) порядки слагаемых будут определяться только порядками коэффициентов в этих слагаемых. Для оценки порядка этих коэффициентов примем следующие порядки конструктивных параметров охладителя и параметров обрабатываемого продукта:

$h \sim 0{,}01\text{м}$, $R_1 \sim 0{,}01\text{м}$, $R_2 \sim 0{,}1\text{м}$, $q \sim 10^{-4}\ \text{м}^3/\text{с}$,

$a \sim 10^{-6}\ \text{м}^2/\text{с}$, $k \sim 10\,\text{Па}\cdot\text{с}$, $n \sim 1$. Коэффициент B во втором слагаемом, согласно (9) и (11), будет иметь порядок 10^4, т. е. $B>>1$. Коэффициент в последнем слагаемом уравнения (19) имеет порядок 1. Принимая во внимание, что $\frac{h^2}{R_2^2} << \frac{Bh^2}{R_2^2} \sim 1$, оставим в уравнении (13), а значит, и в уравнении (10) два последних слагаемых. На этом основании уравнение (10) для нулевого приближения при условии $B>>1$ примет вид

$$-\frac{B}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0\,. \qquad (15)$$

Уравнение (15) решим методом разделения переменных. Решение уравнения (15) в виде ряда имеет вид

$$T(r,z) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j\, e^{-\frac{j^2\pi^2}{2Bh^2}r^2} \sin\frac{j\pi}{h}z + T_3 + \frac{z}{h}(T_4 - T_3)\,, \qquad (16)$$

где $C_k = C_2\ C_3$ и индекс j показывает, что эта константа будет зависеть от номера j собственных чисел. Найдем постоянные интегрирования C_j используя первое граничное условие (12), т.е. $T(R_1, z) = T_1$. На основании этого условия и соотношения (16) получим уравнение для определения C_j.

Выражение для определения распределения температуры в пространстве между продуктовыми пластинами в нулевом приближении примет следующий вид:

$$T(r,z) = \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\left[T_1 - T_3 - (T_1 - T_4)\cos j\pi\right] e^{\frac{j^2\pi^2}{2Bh^2}(R_1^2 - r^2)} \times \qquad (17)$$

$$\times \sin\frac{j\pi}{h}z + T_3 + \frac{z}{h}(T_4 - T_3)$$

Для нахождения первого приближения решения уравнения (10) подставим найденное решение нулевого приближения в ранее отброшенное слагаемое $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$ этого уравнения. После этого придем к неоднородному линейному уравнению в частных производных

$$-\frac{B}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{2\pi}{Bh^2}\sum_{j=1}^{\infty} j\left[T_1 - T_3 - (T_1 - T_4)\cos j\pi\right] \times \qquad (18)$$

$$\times\left(1 - \frac{j^2\pi^2}{Bh^2}r^2\right) e^{\frac{j^2\pi^2}{2Bh^2}(R_1^2 - r^2)} \sin\frac{j\pi}{h}z.$$

Решение этого уравнения будем искать в таком же виде, как и решение уравнения (15) нулевого приближения, т.е.

$$T(r,z) = \sum_{j=1}^{\infty} F_j(r)\sin\frac{j\pi}{h}z + T_3 - \frac{z}{h}(T_3 - T_4), \qquad (19)$$

где $Fj(r)$ – неизвестная пока функция, зависящая от координаты r и номера j собственных чисел. Подстановкой выражения $T(r, z)$ из (19) в левую часть уравнения (18) и приравниванием коэффициентов при $\sin\frac{j\pi}{h}z$ в левой и правой частях уравнения (18) получим обыкновенное линейное уравнение первого порядка относительно функции $F(r)$.

Решением этого уравнения является функция

$$F_k(r) = -\frac{2\pi j}{B^2h^2}\left[T_1 - T_3 - (T_1 - T_4)\cos j\pi\right]\left(\frac{r^2}{2} - \frac{j^2\pi^2}{4Bh^2}r^4\right) e^{\frac{j^2\pi^2}{2Bh^2}(R_1^2 - r^2)} + \qquad (20)$$

$$+ C_k^* e^{-\frac{j^2\pi^2}{2Bh^2}r^2},$$

где C_j^* – постоянная интегрирования.

На основании (19) и (20) имеем

$$T(r,z) = -\frac{\pi}{B^2h^2}\sum_{j=1}^{\infty}\left\{ j\left[T_1 - T_3 - (T_1 - T_4)\cos j\pi\right]\left(r^2 - \frac{j^2\pi^2}{2Bh^2}r^4\right) e^{\frac{j^2\pi^2}{2Bh^2}(R_1^2 - r^2)} + \right. \qquad (21)$$

$$\left. + C_j^* e^{-\frac{j^2\pi^2}{2Bh^2}r^2}\right\} \sin\frac{j\pi}{h}z + T_3 - \frac{z}{h}(T_3 - T_4).$$

Постоянную интегрирования C_j^* находим так же, как и постоянную C_j для нулевого приближения, т.е. из условия $T(R_1,.z) = T_1$.

$$C_j^* = -j\left[T_1 - T_3 - (T_1 - T_4)\cos j\pi\right]\left(\frac{2B^2h^2}{j^2\pi^2} + R_1^2 - \frac{j^2\pi^2}{2Bh^2}R_1^4\right) e^{\frac{j^2\pi^2}{2Bh^2}R_1^2}. \qquad (22)$$

Подставив данное выражение C_j^* в правую часть равенства (21), приведем его к виду

$$T(r,z)=-\frac{\pi}{B^2h^2}\sum_{j=1}^{\infty}\left\{j\left[T_1-T_3-(T_1-T_4)\cos j\pi\right]\left[r^2-R_1^2-\frac{j^2\pi^2}{2Bh^2}(r^4-R_1^4)-\frac{2B^2h^2}{j^2\pi^2}\right]\cdot e^{\frac{j^2\pi^2}{2Bh^2}(R_1^2-r^2)}\sin\frac{j\pi}{h}z\right\}+T_3-\frac{z}{h}(T_3-T_4). \quad (23)$$

Таким образом, формула (23) применена для расчета температуры продукта как при центральном способе его подачи, так и при периферийном способе подачи в пространство между дисками.

Полученные формулы позволяют проводить расчёт процесса охлаждения при кристаллизации лактозы в молочной сыворотке в потоке и определять основные параметры пластинчатых скребковых теплообменных аппаратов. Полученные результаты расчета позволяют определять необходимую площадь теплопередающей поверхности аппарата при охлаждении, в котором начинается массовая кристаллизация лактозы.

Список литературы

1. Бредихин, С.А. Технологическое оборудование предприятий молочной промышленности / С.А. Бредихин– М.: Колос, 2010. – 408 с.
2. Кулаков, А.В. Элементы механики пищевых сред / А.В. Кулаков, В.М. Чесноков. – М.: МГУПБ, 2004. – 301 с.
3. Вязкость молочной сыворотки и продуктов из неё / Е.А. Чеботарёв, П.Г. Нестеренко, Л.Е. Давыдянц и др. // Молочная промышленность. – 1983. – № 2. – С. 26–27.
4. Рашкин, К.А. Закономерности термообработки вязких продуктов в пластинчатом скребковом аппарате/ К.А. Рашкин, В.М. Чесноков, С.А. Бредихин // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. – 2012. – № 2. – С. 24–29.
5. Шульман, З.П. Конвективный теплоперенос реологически сложных жидкостей / З.П. Шульман. – М.: Энергия, 1975. – 352 с.
6. Broun, D.J. Crystal grouth measurement and modeling of fluid flow in a crystallizer / D.J. Broun, F. Bousan // Zuckerindustrie. – 1992. – Vol. 117. – № 1. – P. 35–39.
7 Spreer, E. Technologie der Milchverarbeitung / E. Spreer. – Hamburg: Behr's Verlag, 1995. – 517 s.

ГНУ ВНИИ молочной промышленности Россельхозакадемии,
115093, г. Москва, ул. Люсиновская, 35, корп. 7,
Тел/факс: +7 (499) 236 31 64,
e-mail: vnimi5@rambler.ru, gnu-vnimi@yandex.ru

SUMMARY

A.S. Bredikhin, V.V. Chervetsov

FEATURES OF WHEY COOLING IN STREAM LACTOSE CRYSTALLIZATION

The article is devoted to the study of heat transfer during whey cooling. Cooling of whey – is one of the major processes affecting the crystallization of the lactose. The analytical study of the temperature change of whey in relation to its viscosity properties during cooling in the plate scraper heat-exchanger of continuous action is carried out. The temperature division of the product in the machine is studied by diffrential equations for heat transfer in moving fluids in cylindrical coordinate system with asymmetric distribution of temperature without allowing for energy dissipation. The change in temperature in connection with the rheological properties of the whey is determined. The results for practical use are obtained.

Whey, cooling, rheological properties, lactose crystallization, continuous heat exchanger.

Research Institute of Milk Industry Agricultural Sciences,
115093, Moscow, ul. Lyusinovskaya, 35, building 7.
Phone/fax: +7 (499) 236 31 64,
e-mail: vnimi5@rambler.ru, gnu -vnimi @ yandex.ru

Дата поступления: 01.08.2013