УДК [66.063.94:66.081.6]:517

А.Е. Тимофеев, Б.А. Лобасенко, Р.В. Котляров

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА МЕМБРАННОГО КОНЦЕНТРИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Предложена методика моделирования процессов мембранного концентрирования жидких пищевых сред на основе передаточных функций. Проведена структурная и параметрическая идентификация модели процесса концентрирования в мембранном аппарате с отводом примембранного пограничного слоя. Экспериментально подтверждена адекватность модели.

Моделирование, математическая модель, передаточная функция, мембранное концентрирование.

Введение

Исследование характеристик любой системы математическими методами сводится к ее формализации, т.е. к построению математической модели. Вид математической модели зависит от природы реального объекта, от задач исследования объекта, от требуемой достоверности и точности решения задачи.

Для аналитического моделирования характерно то, что моделируется только функциональный аспект системы. При этом уравнения системы, описывающие закон (алгоритм) ее функционирования, записываются в виде некоторых аналитических соотношений или логических условий.

При имитационном моделировании воспроизводится алгоритм функционирования системы во времени – поведение системы, причем имитируются элементарные явления, составляющие процесс, с сохранением их логической структуры и последовательности протекания, что позволяет по исходным данным получить сведения о состояниях процесса в определенные моменты времени, дающие возможность оценить характеристики системы.

Информационное (кибернетическое) моделирование связано с исследованием моделей, в которых отсутствует непосредственное подобие физических процессов, происходящих в моделях, реальным процессам. В этом случае стремятся отобразить лишь некоторую функцию, рассматривают реальный объект как «черный ящик», имеющий ряд входов и выходов, и моделируют некоторые связи между выходами и входами. Таким образом, в основе информационных (кибернетических) моделей лежит отражение некоторых информационных процессов, что позволяет оценить поведение реального объекта. Для построения модели в этом случае необходимо выделить исследуемую функцию реального объекта, попытаться формализовать эту функцию в виде некоторых операторов связи между входом и выходом и воспроизвести данную функцию на имитационной модели.

Информационное моделирование, хотя и не отражает физические закономерности описываемых процессов, является наиболее простой методикой моделирования. Подобные математические модели достаточно точно описывают поведение технических систем и легко могут быть реализованы в большинстве существующих программ.

Целью данной статьи является разработка общей методики информационного моделирования процесса мембранного концентрирования жидких пищевых сред, структурная и параметрическая идеентификация математической модели процесса концентрирования, проверка ее адекватности.

Объекты и методы исследований

Объектом моделирования является процесс мембранного концентрирования жидких пищевых сред в мембранном аппарате с отводом примембранного пограничного слоя.

Методами исследования являются методы информационного (кибернетического) моделирования, рассматривающие реальный объект как систему, состоящую из взаимосвязанных и взаимодействующих между собой и с внешней средой элементов [1]. В общем случае математическое описание исследуемой системы может быть выражено зависимостью:

$$\{Y\} = \Phi[\{X\},\{Z\},\{V\}] \ , \qquad (1)$$

где $\{Y\} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_l)$ – вектор выходных переменных системы; $\{X\} = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$ – вектор входных контролируемых управляемых независимых переменных (факторов); $\{Z\} = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_k)$ – вектор входных контролируемых, но неуправляемых независимых переменных; $\{V\} = (V_1, V_2, \ldots, V_n)$ – вектор неконтролируемых возмущающих воздействий; Φ – оператор системы, определяющий связь между указанными переменными.

Информация в системе передается в виде сигналов, представляющих собой какое-либо проявление движения субстанции: механическое движение, распространение тепла, вещества, электрического тока, звуков, света, радиоволн и т.д.

Характер прохождения сигнала через элемент системы отражает его передаточные свойства. Наиболее распространенной формой описания передаточных свойств элемента является обыкновенное дифференциальное уравнение – уравнение динамики объекта, которое может быть трансформировано с помощью преобразования Лапласа в передаточную функцию элемента. Передаточная функция представляет собой некоторый динамический оператор, характеризующий прохождение сигналов через систему.

Результаты и их обсуждение

Предложена методика, содержащая анализ объекта моделирования.

Анализ процесса мембранного концентрирования и выявление основных входных и выходных параметров. На данном этапе исходя из описания мембранного аппарата в соответствии с принципом «черного ящика» необходимо выделить основные входные X и выходные Y параметры объекта моделирования, а также определить каналы передачи сигналов с входов на выходы системы. Множество входных контролируемых неуправляемых независимых переменных и неконтролируемых возмущающих воздействий не рассматривается.

Входным воздействием, как правило, является концентрация задерживаемых веществ в исходном растворе X_1, % масс. Кроме того, на процесс концентрирования влияют конструктивные параметры аппарата и технологические режимы процесса. Первые обозначим подмножеством α множества X, вторые – подмножеством β множества X. То есть множество входных контролируемых управляемых независимых переменных в данном случае может быть отражено выражением:

$$\{X\} = (X_1, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_m), \qquad (2)$$

где m – количество технологических параметров, влияющих на процесс концентрирования; n – количество конструктивных параметров аппарата, оказывающих влияние на процесс концентрирования.

Основные технологические режимы процесса: рабочее давление (β_1, МПа), температура концентрируемого раствора (β_2, ºС) и гидродинамическая обстановка в канале аппарата (скорость движения среды β_3, м/с). Количество конструктивных параметров n зависит от мембранного аппарата.

К выходным параметрам относятся: содержание растворенных веществ в отводимом примембранном пограничном слое Y_1, % масс.; концентрация растворенных веществ в основном потоке Y_2, % масс.; удельная производительность по фильтрату Y_3, $м^3/м^2 \cdot с$.

Структурную схему процесса мембранного концентрирования можно представить в виде рис. 1.

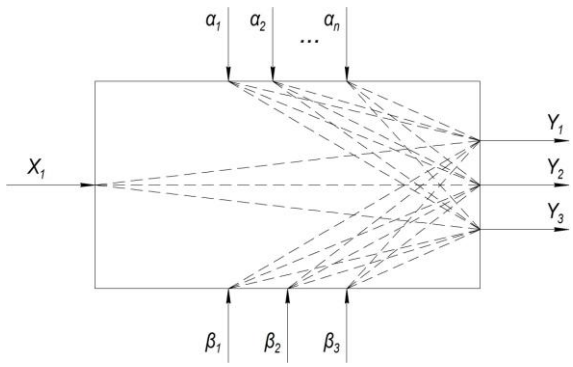

Рис. 1. Структурная схема процесса мембранного концентрирования

Передаточные свойства каждого канала системы определяются соответствующей передаточной функцией (см. рис. 1), обозначения которой имеют двойной индекс: первый отражает входной параметр, второй – наименование выхода системы.

Основные каналы типа «вход – выход»:

– «исходная концентрация раствора X_1 – содержание растворенных веществ в отводимом примембранном пограничном слое Y_1» ($W_{X_1-Y_1}(S)$);

– «исходная концентрация раствора X_1 – содержание растворенных веществ в обедненном потоке Y_2» ($W_{X_1-Y_2}(S)$);

– «исходная концентрация раствора X_1 – удельная производительность Y_3» ($W_{X_1-Y_3}(S)$);

– «конструктивный параметр α_i – содержание растворенных веществ в отводимом примембранном пограничном слое Y_1» ($W_{\alpha_i-Y_1}(S)$), $i=\overline{1,n}$;

– «конструктивный параметр α_i – содержание растворенных веществ в обедненном потоке Y_2» ($W_{\alpha_i-Y_2}(S)$), $i=\overline{1,n}$;

– «конструктивный параметр α_i – удельная производительность Y_3» ($W_{\alpha_i-Y_3}(S)$), $i=\overline{1,n}$;

– «технологический параметр β_i – содержание растворенных веществ в отводимом примембранном пограничном слое Y_1» ($W_{\beta_i-Y_1}(S)$), $i=\overline{1,3}$;

– «технологический параметр β_i – содержание растворенных веществ в обедненным потоке Y_2» ($W_{\beta_i-Y_2}(S)$), $i=\overline{1,3}$;

– «технологический параметр β_i – удельная производительность Y_3» ($W_{\beta_i-Y_3}(S)$), $i=\overline{1,3}$.

Определение диапазонов изменения входных воздействий. На основе экспериментальных и литературных данных установлены следующие диапазоны:

– концентрация исходного раствора молочной (творожной) сыворотки 3,7÷6,8 % масс.;

– температура сыворотки 20÷60 °С. Нижний предел диапазона обусловлен средней температурой производственных помещений, верхний – термолабильностью белков молочной сыворотки;

– давление процесса ультрафильтрации 0,1÷0,25 МПа. Нижний предел обусловлен тем, что для осуществления процесса концентрирования необходима разность давлений – внутри и снаружи (атмосферного) мембраны – как основная движущая сила процесса. Верхний предел выбран в соответствии с максимальным рабочим давлением для данного типа мембран (керамическая мембрана третьего поколения из оксида алюминия);

– режим течения жидкости внутри мембраны определяется критерием Рейнольдса 0÷2300, или при внутреннем диаметре мембраны 6 мм скорость течения составит 0÷0,6 м/с. При таких значениях критерия Рейнольдса и скорости течения обеспечивается ламинарный режим движения среды, что снижает размывание примембранного пограничного слоя в канале аппарата.

На данном этапе моделирования выбор диапазонов изменения конструктивных параметров не рассматривается.

Выбор вида и величины входных воздействий. При экспериментальных и теоретических исследованиях объектов и их элементов используют ряд стандартных сигналов – типовых воздействий. Эти воздействия описываются простыми математическими функциями и легко воспроизводятся при испытании систем. Использование типовых («эталонных») воздействий позволяет унифицировать расчеты различных систем и облегчает сравнение передаточных свойств систем. Поскольку на процесс концентрирования оказывает значительное влияние накопление частиц растворенных веществ на поверхности мембраны, что в свою очередь является длительным процессом, из типовых воздействий рекомендуется выбрать ступенчатое воздействие – воздействие, которое мгновенно возрастает от нуля до некоторого значения и далее остается постоянным. Такому воздействию соответствует функция:

$$x(t) = \begin{cases} 0, \text{при } t < 0, \\ a_0, \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Значение величины ступенчатого воздействия a_0 необходимо выбрать, учитывая диапазон изменения входных воздействий.

Наносить воздействия необходимо в момент, когда система находится в статическом режиме, при котором выходная величина не изменяется во времени. Очевидно, что статический режим (или состояние равновесия) может иметь место лишь тогда, когда входные воздействия постоянны во времени.

Образование примембранного пограничного слоя и его отрыв от поверхности мембраны происходят циклически в течение некоторого времени. Поэтому в данном случае для определения реакции системы на то или иное воздействие необходимо совместное нанесение соответствующего входного воздействия по каналам «конструктивный параметр – выход» или «технологический параметр – выход» с входным воздействием по каналу «концентрация исходного раствора – выход». Далее исходя из принципа суперпозиции аналитически возможно определить реакцию системы на чистое возмущение.

Структурная идентификация объекта моделирования состоит в выборе структуры модели по результатам изучения имеющихся априорных сведений об объекте и выборе критерия близости (подобия) модели и объекта.

Изменение концентрации растворенных веществ в примембранном пограничном слое носит колебательный характер, объясняющийся периодичностью накопления белкового слоя определенной толщины и его удаления потоком среды. Поэтому для описания процесса в качестве модели последнего выбрано колебательное звено с передаточной функцией:

$$W(S) = \frac{k}{T^2 \cdot S^2 + 2 \cdot T \cdot \xi \cdot S + 1}, \quad (4)$$

где k – коэффициент передачи звена; T – постоянная времени объекта; ξ – относительный коэффициент демпфирования ($1 > \xi > 0$).

Определение передаточных функций по каналам воздействия конструктивного параметра на выходы системы предполагает одновременное внесение в систему воздействий по входам X_1 и α_i (рис. 2).

В соответствии с рис. 2 можно записать:

$$Y_j(S) = X_1(S) \cdot W_{X_1 - Y_j}(S) + \alpha_i(S) \cdot W_{\alpha_i - Y_j}(S), \quad (5)$$

$$W_{\alpha_i - Y_j}(S) = \frac{Y_j(S) - X_1(S) \cdot W_{X_1 - Y_j}(S)}{\alpha_i(S)}. \quad (6)$$

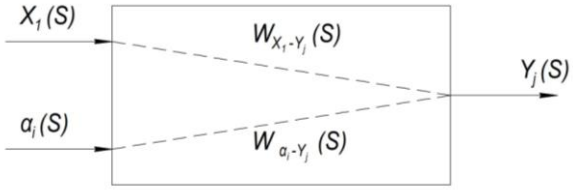

Рис. 2. Определение передаточных функций по каналам воздействия конструктивного параметра на выходы системы

Определение передаточных функций по каналам воздействия технологического параметра на выходы системы предполагает одновременное внесение в систему воздействий по входам X_1 и β_i (рис. 3).

В соответствии с рис. 3 можно записать:

$$Y_j(S) = X_1(S) \cdot W_{X_1 - Y_j}(S) + \beta_i(S) \cdot W_{\beta_i - Y_j}(S), \quad (7)$$

$$W_{\beta_i - Y_j}(S) = \frac{Y_j(S) - X_1(S) \cdot W_{X_1 - Y_j}(S)}{\beta_i(S)}. \quad (8)$$

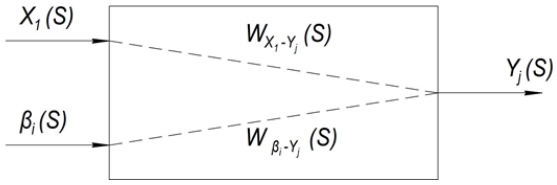

Рис. 3. Определение передаточных функций по каналам воздействия технологического параметра на выходы системы

Итоговую модель объекта можно записать в виде:

$$Y_j(S) = X_1(S) \cdot W_{X_1 - Y_j}(S) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(S) \times \\ \times W_{\alpha_i - Y_j}(S) + \sum_{i=1}^{3} \beta_i(S) \cdot W_{\beta_i - Y_j}(S),\ j = 1...3. \quad (9)$$

Уравнение (9) определяет состояние выходов объекта моделирования во времени при известной концентрации растворенных веществ в исходном растворе $X_1(S)$, а также при определенных значениях конструктивных α и технологических β параметров процесса концентрирования.

Выбор критерия близости. Критерий близости (функция невязки) должен удовлетворять следующим требованиям: не должен принимать отрицательных значений; минимум критерия близости должен соответствовать решению поставленной задачи; этот минимум должен быть близок к нулю (в идеале равен нулю) при совпадении экспериментальных результатов с результатами, полученными с помощью модели.

Наиболее часто используется квадратичная запись критерия:

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - y_i^M]^2 \to \min, \quad (10)$$

где y_i – значение выходной переменной объекта в i-й момент времени; y_i^M – значение выходной переменной модели в i-й момент времени; n – размерность массива экспериментальных данных.

Определение параметров модели. Данный этап можно трактовать как задачу нахождения экстремума функции многих переменных, имеющих определенные ограничения. Здесь в качестве функции невязки выступает выражение (10), а переменными величинами являются параметры передаточных функций (коэффициенты передачи, постоянные времени и т.д.). Таким образом, на этом этапе по экспериментальным данным определяются значения параметров передаточных функций каналов системы.

Проверка адекватности модели. На данном этапе необходимо установить, насколько хорошо модель описывает реальные процессы, происходящие в системе, насколько качественно она будет прогнозировать развитие технологических процессов. Проверку адекватности проводят на основании некоторой экспериментальной информации, полученной при функционировании системы или при проведении специального эксперимента. Кроме того, необходимо провести проверку непротиворечивости, чувствительности и реалистичности полученной модели. Модель, отвечающая требованиям непротиворечивости, чувствительности и реалистичности, может считаться адекватной и использоваться при прогнозировании описываемых процессов.

На основе экспериментальных зависимостей (разгонных характеристик), полученных при внесении в систему выбранных воздействий (3), проведена параметрическая идентификация модели процесса мембранного концентрирования в аппарате с отводом примембранного пограничного слоя [2].

Для оценки адекватности модели процесса мембранного концентрирования экспериментальным данным предложена ее реализация в системе MATLAB при помощи стандартных средств приложения Simulink. Проверка адекватности по описанию и прогнозированию реального процесса концентрирования показала, что расхождение экспериментальных данных и данных, полученных на основании модели, не превышает 5,5 % в соответствии с квадратичной оценкой. Небольшие расхождения

расчет-ных и экспериментальных данных говорят о достаточно высокой степени адекватности полученной математической модели.

Проверка непротиворечивости модели при варьировании конструктивных параметров позволяет говорить о достаточной степени адекватности при различных комбинациях значений конструктивных параметров, соответствующих нижней и верхней границе выбранных диапазонов. Расхождение экспериментальных и теоретических данных не превышает 2 %.

Таким образом, модель процесса мембранного концентрирования в мембранном аппарате с отводом примембранного пограничного слоя, разработанная на основе теории передаточных функций, с достаточной степенью адекватна экспериментальным данным.

Список литературы

1. Кафаров, В.В. Методы кибернетики в химии и химической технологии. – М.: Химия, 1985.
2. Пат. 2285556 Российская Федерация, МПК[7] BO1D63/06. Аппарат для мембранного концентрирования / Лобасенко Б.А., Котляров Р.В., Истратова Е.Е.; заявитель и патентообладатель Кемеровский технологический институт пищевой промышленности. – № 2005108765/15; заявл. 28.03.05; опубл. 20.10.06.

ФГБОУ ВПО «Кемеровский технологический институт пищевой промышленности»,
650056, Россия, г. Кемерово, б-р Строителей, 47.
Тел./факс: (3842) 73-40-40
e-mail: office@kemtipp.ru

SUMMARY

A.E. Timofeyev, B.A. Lobasenko, R.V. Kotlyarov

DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL MODEL OF MEMBRANE CONCENTRATION BASED ON TRANSFER FUNCTIONS

The modeling method of membrane concentration processes of liquid food media based on transfer functions is proposed. Structural and parametric identification of the model of the concentration process in the membrane apparatus with the effect of border-membrane layer removing has been done. The model goodness of fit is proved by experiment.

Modeling, mathematical model, transfer function, membrane concentration.

Kemerovo Institute of Food Science and Technology
47, Boulevard Stroiteley, Kemerovo, 650056, Russia
Phone/Fax: +7(3842) 73-40-40
e-mail: office@kemtipp.ru