ISSN 2074-9414 (Print)
ISSN 2313-1748 (Online)

https://doi.org/10.21603/2074-9414-2021-3-615-627
УДК 532.135

Оригинальная статья
http://fptt.ru

Параметрическая идентификация реологической модели Карро с использованием регуляризации А. Н. Тихонова на основе CFD-модели

А. А. Хвостов[1,2], Г. О. Магомедов[3], В. И. Ряжских[1,2], А. В. Ковалев[4], А. А. Журавлев[2,*], М. Г. Магомедов[3]

[1] *Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия*

[2] *Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», Воронеж, Россия*

[3] *Воронежский государственный университет инженерных технологий, Воронеж, Россия*

[4] *Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*

Поступила в редакцию: 21.04.2021
Принята после рецензирования: 13.05.2021
Принята в печать: 15.07.2021

**e-mail: zhuraa1@rambler.ru*

© А. А. Хвостов, Г. О. Магомедов, В. И. Ряжских, А. В. Ковалев, А. А. Журавлев, М. Г. Магомедов, 2021

Аннотация.
Введение. Использование реологической модели Карро для описания пространственных течений неньютоновских сред приводит к необходимости оценки параметров модели, характеризующих вязкость среды при предельных значениях скоростей сдвига, что неосуществимо инструментальными методами. Для оценки этих параметров предлагается метод идентификации параметров модели Карро с использованием алгоритма регуляризации.
Объекты и методы исследования. Помадная конфетная масса по рецептуре неглазированных конфет «Сливочная помадка». Использовали стандартные методы исследования свойств сырья и полуфабрикатов, методы математической обработки экспериментальных данных, моделирования и оптимизации.
Результаты и их обсуждение. Для параметрической идентификации реологической модели Карро разработан алгоритм на основе метода регуляризации А. Н. Тихонова. Минимизация невязки расчета достигается как по результатам вискозиметрических измерений, так и по CFD-модели, которая обеспечивает расчет гидродинамического режима течения при предельных значениях скоростей сдвига. CFD-модель установившегося неизотермического течения нелинейно-вязкой среды по цилиндрическому капилляру формализована на основе уравнений сохранения массы, энергии и импульса с учетом общепринятых допущений. На примере помадной массы показана идентификации реологических параметров модели Карро. Предсказание вязкости помадной массы осуществляется с ошибкой, не превышающей 14,07 %.
Выводы. Алгоритм параметрической идентификации позволяет оценить реологические параметры структурированных жидкообразных сред с реологическим законом Карро в тех случаях, когда отсутствует экспериментальная информация о поведении среды при предельных скоростях сдвига. При этом устраняются вычислительные проблемы, характерные для реологической модели Оствальда-де Виля, возникающие при решении практических задач пространственных течений неньютоновских сред с предельными значениями вязкости.

Ключевые слова. Регуляризация, идентификация, реологическая модель, модель Карро, гидродинамика, CFD-модель

Для цитирования: Параметрическая идентификация реологической модели Карро с использованием регуляризации А. Н. Тихонова на основе CFD-модели / А. А. Хвостов [и др.] // Техника и технология пищевых производств. 2021. Т. 51. № 3. С. 615–627. https://doi.org/10.21603/2074-9414-2021-3-615-627.

Original article
Available online at http://fptt.ru/eng

Carreau's Rheological Model and A.N. Tikhonov's Regularization Method: Parametric Identification Based on a CFD model

Anatoly A. Khvostov[1,2], Gazibeg O. Magomedov[3], Victor I. Ryazhskih[1,2], Aleksey V. Kovalev[4], Aleksey A. Zhuravlev[2,*], Magomed G. Magomedov[3]

[1] Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia

[2] Military Educational and Scientific Centre of the Air Force N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy, Voronezh, Russia

[3] Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russia

[4] Voronezh State University, Voronezh, Russia

Received: April 21, 2021

Accepted in revised form: May 13, 2021
Accepted for publication: July 15, 2021

*e-mail: zhuraa1@rambler.ru

© A.A. Khvostov, G.O. Magomedov, V.I. Ryazhskih, A.V. Kovalev, A.A. Zhuravlev, M.G. Magomedov, 2021

Abstract.
Introduction. Carreau's rheological model can describe the three-dimensional flows of non-Newtonian media. However, it requires modeling parameters for the viscosity of the medium at the limiting values of shear rates, which cannot be achieved by instrumental methods. The present article introduces a novel method that can identify the parameters of Carreau's model using a regularization algorithm.
Study objects and methods. The study featured fondant mass produced according to the traditional formulation for Creamy Fondant unglazed candies. Standard methods were used to describe the properties of the raw materials and semi-finished products, as well as methods of mathematical processing, modeling, and optimization.
Results and its discussion. The research produced an algorithm based on A.N. Tikhonov's regularization method of the parametric identification of Carreau's rheological model. The calculation residual was minimized by the viscometric measurements and the CFD model, which provided the calculation of the hydrodynamic flow regime at the limiting values of shear rates. The CFD model of a steady non-isothermal flow of a nonlinear viscous medium through a cylindrical capillary was based on the equations of conservation of mass, energy, and momentum. The rheological parameters of Carreau's model were illustrated by the case of fondant mass. The error for the viscosity prediction did not exceed 14.07%.
Conclusion. The parametric identification algorithm made it possible to evaluate the rheological parameters of structured liquid media with Carreau's rheological law in cases that lack experimental information on the behavior of the medium at limiting shear rates. The algorithm eliminated the computational problems typical of Ostwald and de Ville's rheological model, which usually arise when solving practical problems of three-dimensional flows of non-Newtonian media with limiting viscosity values.

Keywords. Regularization, identification, rheological model, Carreau fluid model, hydrodynamics, CFD-model

For citation: Khvostov AA, Magomedov GO, Ryazhskih VI, Kovalev AV, Zhuravlev AA, Magomedov MG. Carreau's Rheological Model and A.N. Tikhonov's Regularization Method: Parametric Identification Based on a CFD model. Food Processing: Techniques and Technology. 2021;51(3):615–627. (In Russ.). https://doi.org/10.21603/2074-9414-2021-3-615-627.

Введение

Полнота описания технологических процессов пищевых производств как сложных систем определяется степенью детализации свойств и закономерностей всех подсистем и связей между ними. Дополнение новых подсистем, уточнение их связи с другими подсистемами, а также оценка влияния на эффективность функционирования всей системы позволяет выявить ее новые свойства, повысить качество оценки ее состояния, точность прогнозов и эффективность управления технологическим процессом как системой в целом.

Глубина и интенсивность протекания отдельных процессов, а также показатели качества полуфабрикатов и готовой продукции зависят от реологических свойств, главным из которых является вязкость. Пищевые массы представляют собой структурированные дисперсные системы, обладающие аномалией вязкости. Реологические свойства пищевых масс определяют выбор способа их дальнейшей переработки, способность к сохранению или изменению сформированной структуры [1–3]. Реологические свойства пищевого сырья и полуфабрикатов влияют на термогидродинамику процессов их перемешивания, транспортирование по трубам, формование, нагрев, охлаждение и пр.

При проектировании оборудования пищевых производств используются расчетные методики, базирующиеся на следующих допущениях: изотермичность и ламинарность режима, осреднение основных параметров процесса (скорость, вязкость, температура, концентрация). При этом не учитываются нестационарность реологических и теплофизических свойств, а также их пространственная неоднородность [3–5].

Сделанные допущения оказываются справедливы для многих процессов, обладающих высокой инерционностью, интенсивным перемешиванием и протекающих в аппаратах, допускающих упрощение до простейших геометрических форм (например,

цилиндрические и плоскощелевые каналы). Однако при расчетах низкоинерционных процессов в аппаратах со сложной геометрией (спиральные каналы, каналы с застойными зонами, области резких сужений и расширений и пр.) необходимы нестационарные пространственные модели, учитывающие существенную геометрическую неоднородность полей скоростей, давлений, температур и скоростей сдвига [6, 7]. В этой связи гидромеханические процессы необходимо рассматривать сопряженно с процессами теплообмена, использовать модели неизотермического течения сплошной среды, а также зависимость теплофизических свойств среды от температуры, а вязкость – как нелинейную функцию температуры и скорости сдвига [8, 9].

Основой для гидродинамических расчетов служит реологическая модель сплошной среды, создание которой возможно в рамках структурно-параметрического синтеза. Это требует проведения структурной идентификация реологической модели и оценки ее параметров.

Для описания реологического поведения структурированных жидкообразных пищевых сред широко используется уравнение Оствальда-де Виля, устанавливающее связь между вязкостью μ (Па·с) и скоростью сдвига $\dot{\gamma}$ (с$^{-1}$) в виде степенного уравнения [1, 2]:

$$\mu = K\dot{\gamma}^{n-1} = \mu^* \left(\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}^*} \right)^{n-1} \quad (1)$$

где K – консистентная переменная, Па·с^n; n – индекс течения; $\dot{\gamma}^*$ – скорость сдвига приведения, с$^{-1}$, μ^* – вязкость при скорости сдвига приведения, Па·с.

Несмотря на то, что уравнение Оствальда-де Виля не имеет теоретического обоснования и является всего лишь удачным эмпирическим приближением, степенная зависимость (1) показала свою состоятельность при описании реологических кривых $\mu(\dot{\gamma})$ широкого спектра пищевых масс, расплавов полимеров, биологических сред, продуктов нефтепереработки и др. [1–5, 10, 11].

Однако уравнение Оствальда-де Виля имеет существенные недостатки. Во-первых, при использовании степенного уравнения (1) возникают существенные вычислительные проблемы при расчетах в окрестности предельных значений скорости сдвига $\dot{\gamma} \to 0$ и $\dot{\gamma} \to \infty$. В этом случае модель некорректна. Нестационарные пространственные модели течения сплошной среды используют поле скоростей, распределенное по сечению в диапазоне от нулевого значения на стенке до некоторого максимального значения. При этом в точке экстремума первая производная скорости по пространственной координате (скорость сдвига) может обращаться в ноль, что приводит, в соответствии с (1), к сингулярности ввиду бесконечного значения вязкости ($\lim_{\dot{\gamma}\to 0}\mu(\dot{\gamma}) = \infty$). С другой стороны, в отсутствии проскальзывания на стенке канала скорость сдвига стремится к бесконечности. При этом вязкость обращается в ноль ($\lim_{\dot{\gamma}\to\infty}\mu(\dot{\gamma}) = 0$).

Бесконечная вязкость при нулевой скорости сдвига приводит к ошибочному результату, когда в расчетной области встречается область нулевой скорости сдвига. Например, при течении в канале любой геометрии при выполнении условий прилипания скорость течения среды будет изменяться от нуля на стенке канала, проходить через экстремум и снижаться до нуля на противоположной стенке. Это приведет к появлению нулевой скорости сдвига и бесконечной вязкости в точке экстремума. При этом замена нулевых значений сдвиговой вязкости в точке экстремума некоторыми конечными значениями приводит к искажению расчетных значений вязкости в этой области. Предсказанное распределение скоростей в этом случае будет более плоским в центре, чем экспериментальный профиль [11]. Другим примером является процесс заполнение формы нелинейно-вязкой средой при ее литье под давлением. Отливка сопровождается высокими скоростями потока в начале процесса заполнения и низкими значениями скорости потока в момент его завершения. Здесь прогнозируемое значение вязкости по модели Оствальда-де Виля (1) в конце заполнения будет слишком высоким. Это приведет к завышенным значениям необходимого давления отливки.

Вторая проблема заключается в невозможности описания полной реологической кривой $\mu(\dot{\gamma})$ одним уравнением (1), что имеет место при изменении $\dot{\gamma}$ на несколько десятичных порядков. Проблема решается разбиением реологической кривой $\mu(\dot{\gamma})$ на несколько отдельных участков, в пределах которых соблюдается линейная зависимость $\ln\mu$ от $\ln\dot{\gamma}$, которая достигается подбором значения скорости сдвига приведения $\dot{\gamma}^*$.

Согласно основным положениям физико-химической механики дисперсных систем, сформулированными академика П. А. Ребиндером, структурированные жидкообразные среды характеризуются двумя уровнями постоянной (ньютоновской) вязкости [1, 2]. Один из них μ_0 – наибольшая вязкость практически неразрушенной структуры при $\dot{\gamma} \to 0$ (первое ньютоновское плато); при скорости сдвига $\dot{\gamma} \to \infty$ структурированная жидкообразная среда обладает наименьшей вязкостью предельно разрушенной структуры μ_∞ (второе ньютоновское плато). В переходной области (области лавинного разрушения структуры) $\mu_0 \geq \mu(\dot{\gamma}) \geq \mu_\infty$.

Преодоление вычислительных проблем, связанных с получением неустойчивого решения при использовании уравнения Оствальда-де Виля, достигается путем его регуляризации за счет введения в уравнение (1) дополнительных параметров: предельных вязкостей μ_0 и μ_∞. На сегодня предложено несколько реологических уравнений, учитывающих конечные значения вязкости при предельных значениях скорости сдвига.

Трехпараметрические уравнения Штейнера, Ферри, де Хавена и Сиско, учитывающие одну из

двух предельных вязкостей – μ_0 или μ_∞, являются математическим описанием неполных реологических кривых структурированных жидкообразных сред [12, 13]. Четырехпараметрические уравнения Кросса, Карро и его модификация (Карро-Яшида) имеют сходную между собой структуру и обеспечивают высокую точность описания полных реологических кривых нелинейно-вязких сред за счет одновременного учета двух ньютоновских вязкостей μ_0 и μ_∞ [2, 12–14].

Наиболее распространенной является модель Карро, коэффициенты которой имеют некоторое теоретическое обоснование:

$$\mu = \mu_\infty + \left(\mu_0 - \mu_\infty\right)\left[1 + \left(\lambda\dot{\gamma}\right)^2\right]^{\frac{n-1}{2}} \qquad (2)$$

где μ_0 – наибольшая вязкость практически неразрушенной структуры, Па·с; μ_∞ – наименьшая вязкость предельно разрушенной структуры, Па·с; $\dot{\gamma}$ – скорость сдвига, с$^{-1}$, n – показатель нелинейности реологической кривой $\mu(\dot{\gamma})$; λ – время релаксации, с.

Модель Карро учитывает предельные ньютоновские состояния структурированной жидкообразной среды $\lim\limits_{\dot{\gamma}\to 0}\mu(\dot{\gamma}) = \mu_0$ и $\lim\limits_{\dot{\gamma}\to\infty}\mu(\dot{\gamma}) = \mu_\infty$ и описывает ее нелинейно-вязкое поведение в интервале скоростей сдвига от $\dot{\gamma}\to 0$ до $\dot{\gamma}\to\infty$. Степень отклонения от ньютоновского характера течения среды характеризуется показателем нелинейности n, смысл которого тождественен индексу течения уравнения Оствальда-де Виля (1). Обратной величиной к времени релаксации λ является критическая скорость сдвига, при которой происходит резкое снижение вязкости, связанное с лавинообразным разрушением структуры при сдвиговом течении [2].

Модель Карро (2) может быть использована для устранения вычислительных проблем, возникающих при решении широкого круга задач ламинарных пространственных течений нелинейно-вязких сред в изотермической и неизотермической постановках. Однако, ввиду существенной нелинейности модели Карро, получение аналитического решения таких задач, даже с учетом общепринятых допущений (ламинарный, установившийся, изотермический режим течения, пренебрежение сжимаемостью жидкости, инерционными и массовыми силами), не представляется возможным.

Известны также реологические уравнения, включающие гиперболические и экспоненциальные функции скорости и напряжения сдвига (уравнения Прандтля-Эйринга, Пауэлла-Эйринга, Рейнера, Михайлова-Лихтхайма и пр.), а также уравнения, содержащие шесть и более коэффициентов. По причине редкого использования таких уравнений они в данной работе не рассматриваются.

Основным методом определения вязкости является сдвиговая вискозиметрия (ротационная и капиллярная), широко используемая в производственных условиях и научно-исследовательской практике для изучения вязкостных свойств ньютоновских и неньютоновских пищевых и биологических сред, сырья и продуктов нефтехимии и пр. [1–3, 10–12].

Серийно выпускаемые ротационные вискозиметры, укомплектованные различными измерительными системами (коаксиальные цилиндры, конус-плоскость, конус-конус и пр.) с возможностью реализации режимов измерения с контролируемым напряжением или скоростью сдвига (CS- или CR-режим соответственно), позволяют определять вязкость в интервале низких и средних скоростей сдвига от 10^{-3} до 10^{2} с$^{-1}$. Использование в капиллярных вискозиметрах капилляров разного диаметра и длины, а также измерения в режимах постоянного расхода или давления делают возможным изучение вязкостных свойств в интервале средних и высоких скоростей сдвига от 10^{-1} до 10^{5} с$^{-1}$.

Существующие методы сдвиговой вискозиметрии и их приборное оформление не позволяют оценить вязкость в предельных случаях при $\dot{\gamma}\to 0$ и $\dot{\gamma}\to\infty$, что объясняется рядом причин.

Верхняя граница скорости сдвига определяется следующими эффектами:

1) переход от ламинарного к турбулентному режиму течения и возникновение неустойчивости течения потока материала в измерительной системе;
2) значительные тепловыделения в слое испытуемого материала вследствие диссипации механической работы при высоких скоростях сдвига и невозможность обеспечения изотермичности течения;
3) появление эффекта Вайсенберга.

Невозможность проведения измерений на ротационных и капиллярных вискозиметрах в условиях $\dot{\gamma}\to 0$ объясняется следующими причинами:

1) весьма существенная продолжительность реологических измерений (несколько десятков минут), с которой связана стабильность (как физико-химическая, так и структурная) исследуемого материала в условиях эксперимента;
2) предъявление высоких, зачастую невыполнимых, требований к техническим средствам задания и измерения малых линейных и угловых перемещений крутящего момента за длительное время;
3) наличие трудно поддающихся устранению паразитных сопротивлений (трение в подшипниковых опорах и механических передачах подвижных частей вискозиметра), которые вносят в результаты измерений систематические ошибки.

Частичному разрешению проблемы измерения предельной вязкости при $\dot{\gamma}\to 0$ способствует применение в реометрической практике сдвиговых пластометров с реализацией испытаний на ползучесть [3]. Однако следует с осторожностью относиться к результатам, получаемым на пластометрах по причине отсутствия теоретического обоснования приборной инвариантности методов ротационной (капиллярной) вискозиметрии и методов испытания на ползучесть. При этом возникает необходимость в статистической проверке корреляции между

результатами вискозиметрии и испытаний на пластометрах.

Другой применяемый на практике подход – экстраполяция результатов вискозиметрии на уровни $\dot{\gamma} \to 0$ и $\dot{\gamma} \to \infty$. Недостатком экстраполяционного подхода к определению значений предельных вязкостей является высокая доля субъективизма, связанного с интуицией и предпочтениями экспериментатора, приводящая к значительным погрешностям предсказания вязкости в предельных случаях.

Таким образом, методы и приборное оформление сдвиговой вискозиметрии неньютоновских сред не дают информации о полной реологической кривой $\mu(\dot{\gamma})$ и не позволяют провести идентификацию реологических параметров модели Карро (2). Кроме того, общепринятые методы обработки вискозиметрических данных дают информацию о вязкости среды по осредненным по объему измерительной ячейки значениям скорости или напряжения сдвига.

Решение проблемы видится в уточнении результатов натурных вискозиметрических экспериментов посредством дополнительной информации о гидродинамическом поведении материала в измерительной системе вискозиметра.

Источником такой информации может служить вычислительный реологический эксперимент с привлечением методов вычислительной гидродинамики или CFD-подхода (Computational fluid dynamics). Суть CFD-подхода заключается в численном решении для выбранной реологической модели уравнений неразрывности, сохранения импульса и энергии при соответствующих начальных и граничных условиях [15]. CFD-модель дает пространственную картину потока продукта в вискозиметрической системе ротационного или капиллярного типа с учетом большого числа эффектов (тепловых, пристенных, входовых, кинетических пр.), возникающих в ходе натурного реологического эксперимента, учет которых в реальном эксперименте не всегда возможен.

Для эффективного применения CFD-моделирования имеется ряд коммерческих программных продуктов, таких как ANSYS, FlowVision, COMSOL Multiphysics, и программ с открытым кодом. Например, OpenFOAM, Salome и Code Saturn.

В этой связи сдвиговая вискозиметрия как физический метод определения вязкости переходит на качественно новый уровень – приборно-вычислительную вискозиметрию. Последняя представляет собой совокупность методов экспериментальной вискозиметрии, вычислительных экспериментов на CFD-моделях, а также математического аппарата для структурного и параметрического анализа и синтеза реологических свойств и моделей.

Целью работы явилась разработка математического метода идентификации параметров реологической модели Карро с использованием алгоритма регуляризации по результатам сдвиговой вискозиметрии и вычислительного эксперимента, проведенного на CFD-модели течения структурированной жидкообразной среды в измерительной системе вискозиметра.

Объекты и методы исследования

Объектом исследований явилась помадная конфетная масса, приготовленная традиционным способом по рецептуре неглазированных помадных конфет белого сорта «Сливочная помадка». Для приготовления образцов применяли сырье, соответствующее требованиям нормативных документов: сахарный песок (ГОСТ 33222-2015), патока (ГОСТ 33917-2016), молоко сгущенное (ГОСТ 31688-2012), масло сливочное (ГОСТ 32261-2013), ванилин (ГОСТ 16599-71).

В работе использовали органолептические, физико-химические и вискозиметрические методы анализа. Органолептические показатели помадной конфетной массы определяли по ГОСТ 5897-90; массовую долю влаги – по ГОСТ 5900-2014; органолептические и физико-химические показатели помадной конфетной массы соответствовали ГОСТ 4570-2014.

Ротационную вискозиметрию конфетной массы проводили на ротационном вискозиметре Rheotest RN 4.1 с использованием цилиндрической измерительной системы S3 в режиме CR. Диапазон изменения скорости сдвига от 0,47 до 20 $с^{-1}$. Обработку данных проводили согласно ГОСТ 1929-87.

Капиллярную вискозиметрию осуществляли на автоматическом капиллярном вискозиметре АКВ-2ЖВ. Для исключения входовых потерь давления использовали два капилляра одного диаметра (0,0032 м) и разной длины (0,1 и 0,15 м). Обработку данных проводили согласно ГОСТ 7163-84.

В течение всей продолжительности эксперимента конфетную массу термостатировали при температуре 60 °С. Для этого использовали циркуляционный термостат Thermovisc B100F8TFT.

Предметом исследований явилась реологическая модель помадной конфетной массы, а также математический метод ее параметрической идентификации с использованием алгоритма регуляризации А. Н. Тихонова на основе CFD-модели течения нелинейно-вязкой жидкообразной среды в измерительной системе вискозиметра.

В работе использовали методы и программные средства для математической обработки экспериментальных данных, моделирования и оптимизации. Для обработки результатов натурных реологических экспериментов и построения графических зависимостей использовали программу MS Excel 2010 и математический пакет Mathcad 15. CFD-моделирование течения помадной массы в измерительной системе вискозиметра проведено с использованием пакета конечно-элементного анализа ANSYS.

Результаты и их обсуждение

Результаты ротационной вискозиметрии представлены на рисунке 1 в виде зависимости вязкости от скорости сдвига (графические пиктограммы). На рисунке 2 представлены результаты (графические пиктограммы) капиллярной вискозиметрии в виде зависимостей перепада давления на концах капилляра от объемного расхода конфетной массы для двух капилляров с разным отношением длины к диаметру L/D после исключения входовых потерь давления согласно методике [11].

Результаты ротационной и капиллярной вискозиметрии указывают на то, что конфетная масса при сдвиговом течении проявляет аномалию вязкости. Это выражается в непропорциональном уменьшении вязкости при увеличении скорости сдвига и является псевдопластичной средой.

Поскольку ротационная и капиллярная вискозиметрия не позволяют провести натурный эксперимент при предельных значениях скорости сдвига $\dot{\gamma} \to 0$ и $\dot{\gamma} \to \infty$, что не позволяет оценить предельные значения вязкости μ_0 и μ_∞, то для параметрической идентификации реологической модели Карро (2) предлагается использовать алгоритм регуляризации Тихонова, нашедший практическое применение при решении обратных задач теплофизики, нефтегазодобычи, спектрометрии, геофизики, биологии и пр. [16–20].

Для случая дискретной задачи идентификации параметров реологической модели Карро (2) регуляризация заключается в минимизации параметрической функции [16]:

$$F_\alpha(\boldsymbol{\beta}) = F_1(\boldsymbol{\beta}) + \alpha F_2(\boldsymbol{\beta}) \xrightarrow[\boldsymbol{\beta}]{} \min \qquad (3)$$

где $\boldsymbol{\beta} = (\mu_0, \mu_\infty, \lambda, n)$ – вектор реологических параметров модели (2); $F_1(\boldsymbol{\beta})$ – регуляризующая функция; $F_2(\boldsymbol{\beta})$ – стабилизирующая (корректирующая) функция; α – параметр регуляризации ($\alpha > 0$), контролирующий вклад стабилизирующей функции в минимизацию критерия оптимальности.

Минимизация параметрической функции (3) обеспечивает нахождение регуляризованного решения $\mu(\dot{\gamma}, \boldsymbol{\beta})$ в виде модели Карро (2) по результатам ротационной вискозиметрии с одновременной коррекцией значений вектора реологических параметров $\boldsymbol{\beta} = (\mu_0, \mu_\infty, \lambda, n)$ по CFD-модели капиллярной вискозиметрии. В качестве корректирующего параметра, входящего в $F_2(\boldsymbol{\beta})$, предлагается использовать перепад давления в капилляре, являющийся интегральным показателем потокового течения и поддающийся прямому измерению.

Регуляризующая $F_1(\boldsymbol{\beta})$ и стабилизирующая $F_2(\boldsymbol{\beta})$ функции представлены в виде суммы квадратов отклонений расчетных значений от соответствующих экспериментальных:

$$F_1(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \left[\mu_i(\dot{\gamma}_i, \boldsymbol{\beta}) - \mu_i^{\text{э}}(\dot{\gamma}_i) \right]^2; \qquad (4)$$

$$F_2(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{j=1}^{m} \left[\Delta P_j(Q_j, \boldsymbol{\beta}) - \Delta P_j^{\text{э}}(Q_j) \right]^2 \qquad (5)$$

где i, j – номер измерения при ротационной и капиллярной вискозиметрии; n, m – количество измерений при ротационной и капиллярной вискозиметрии; $\dot{\gamma}_i$ – скорость сдвига в i-ом эксперименте; $\mu_i^{\text{э}}(\dot{\gamma}_i)$ – экспериментальное значение вязкости, полученное в i-ом эксперименте; $\mu_i(\dot{\gamma}_i, \boldsymbol{\beta})$ – расчетное значение вязкости, полученное по модели Карро (2) при скорости сдвига $\dot{\gamma}_i$; Q_j – объемный расход среды через капилляр в j-ом эксперименте; $\Delta P_j^{\text{э}}(Q_j)$ – экспериментальное значение перепада давления, полученное в j-ом эксперименте; $\Delta P_j(Q_j, \boldsymbol{\beta})$ – расчетное значение перепада давления, полученное по CFD-модели при объемном расходе среды Q_j.

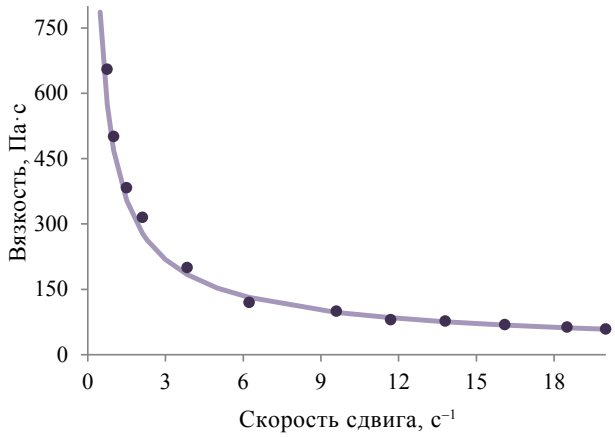


Рисунок 1. Результаты ротационной вискозиметрии

Figure 1. Rotational viscometry results

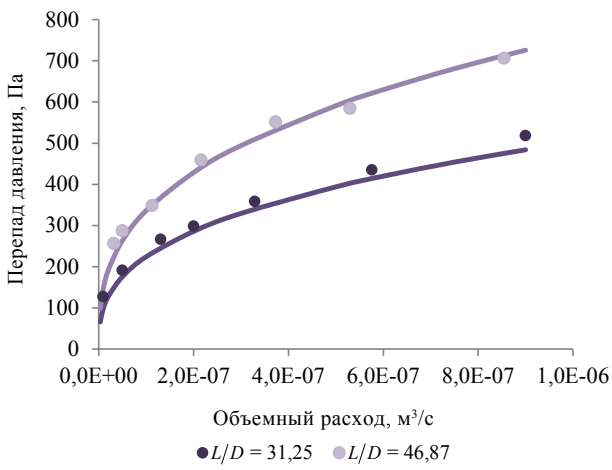


Рисунок 2. Результаты капиллярной вискозиметрии

Figure 2. Capillary viscometry results

Связь между реологической кривой $\mu(\dot{\gamma})$ в виде уравнения Карро (2) и перепадом давления в капилляре может быть формализована с помощью CFD-модели, реализованной в вычислительном пакете конечно-элементного анализа ANSYS [15].

С учетом (4) и (5) имеем критерий минимизации параметрической функции:

$$F_\alpha(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n}\left[\mu_i(\dot{\gamma}_i,\boldsymbol{\beta}) - \mu_i^{\dot{y}}(\dot{\gamma}_i)\right]^2 + \\ + \alpha\sum_{j=1}^{m}\left[\Delta P_j(Q_j,\boldsymbol{\beta}) - \Delta P_j^{\dot{y}}(Q_j)\right]^2 \xrightarrow[\boldsymbol{\beta}]{} \min \quad (6)$$

Вектор реологических параметров $\boldsymbol{\beta}$, доставляющий минимум параметрической функции (6), зависит от параметра регуляризации α, отражающего баланс между предпочтительным выбором результатов ротационной вискозиметрии и коррекцией результатов по CFD-модели. При $\alpha \approx 0$ минимизация параметрической функции (6) эквивалентна минимизации функции (4) по данным ротационной вискозиметрии без учета результатов капиллярной вискозиметрии. Когда параметр регуляризации α слишком велик, минимизация параметрической функции (6) эквивалентна поиску минимума функции (5). Получаемые в этом случае значения вектора реологических параметров $\boldsymbol{\beta}$ обеспечивают решение, наиболее точно предсказывающее результаты капиллярной вискозиметрии без учета данных, полученных на ротационном вискозиметре.

Таким образом, оптимальному значению параметра регуляризации α^* соответствует вектор реологических параметров модели Карро (2) $\boldsymbol{\beta}_{\alpha^*} = (\mu_0, \mu_\infty, \lambda, n)$, при котором одновременно достигается удовлетворительная аппроксимация результатов ротационной и капиллярной вискозиметрии.

Параметр регуляризации может быть выбран на основании принципов невязки, максимума правдоподобия, методов отношений, перекрестной значимости (cross-validation), по минимуму функции чувствительности [16, 18, 21]. В работе для выбора параметра регуляризации α предлагается использовать метод L-кривой [17, 22]. Под ней понимают параметрически заданную кривую от параметра α, определяемую соотношениями:

$$x(\alpha) = \ln\left(F_1(\boldsymbol{\beta}_\alpha)\right),\ y(\alpha) = \ln\left(F_2(\boldsymbol{\beta}_\alpha)\right) \quad (7)$$

где $\boldsymbol{\beta}_\alpha$ – вектор реологических параметров для фиксированного значения параметра регуляризации α, рассчитанный из условия минимизации (6).

Метод L-кривой заключается в нахождении значения параметра регуляризации α^*, при котором достигается максимальная кривизна $k(\alpha)$ параметрически заданной L-кривой:

$$k(\alpha) = \frac{x'(\alpha)y''(\alpha) - x''(\alpha)y'(\alpha)}{\sqrt{\left(x'(\alpha)^2 + y'(\alpha)^2\right)^3}} \xrightarrow[\alpha]{} \max \quad (8)$$

где $x'(\alpha)$, $y'(\alpha)$, $x''(\alpha)$, $y''(\alpha)$ – первая и вторая производная (7) по переменной α.

Для проведения параметрической идентификация реологической модели Карро предлагается алгоритм регуляризации на основе результатов сдвиговой вискозиметрии и вычислительного эксперимента, проведенного на CFD-модели потока среды.

На первом этапе для ряда заданных значений параметра регуляризации α осуществляют поиск значений вектора реологических параметров $\boldsymbol{\beta}_\alpha$, минимизирующего функцию (6). Для этого могут быть использованы известные алгоритмы численной многомерной оптимизации [23].

На втором этапе осуществляют выбор оптимального значения параметра регуляризации α^* по методу L-кривой. Для этого используют условие максимизации критерия (8).

При CFD-моделировании в вычислительном пакете конечно-элементного анализа ANSYS была использована методика, включающая следующие этапы: создание геометрической модели расчетной области моделирования; математическая постановка задачи с выбором физического интерфейса и управляющих уравнений; определение физических свойств частей объекта; задание начальных и граничных условий для различных элементов объекта; задание параметров и генерация конечно-элементной сетки; выбор и задание параметров решающего устройства; проведение вычислительного эксперимента, визуализация и анализ результатов [15].

При составлении математической модели течения нелинейно-вязкой среды по цилиндрическому капилляру длиной L и диаметром D приняты следующие допущения: движение среды установившееся, осесимметричное, ламинарное, среда несжимаема, источники тепла отсутствуют, гравитационные силы и диссипативные члены не учитываются. Расчетная область моделирования задана границами: Ω_1 – входное сечение капилляра; Ω_2 – цилиндрическая поверхность капилляра (стенка); Ω_3 – выходное сечение капилляра.

Уравнения сохранения массы, энергии и импульса при заданных условиях и допущениях имеют вид [15, 24]:

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = \nabla\cdot\left[-P\mathbf{I} + \mu\left(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^{\dot{O}}\right)\right] \\ \rho c_p \mathbf{u}\cdot\nabla T = \nabla\cdot\lambda\nabla T \\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

где ρ – плотность, кг/м^3; $|\mathbf{u}|$ – скорость, м/с; P – давление, Па; $\mathbf{I}$ – единичный тензор; μ – вязкость, Па·с; c_p – удельная теплоемкость, Дж/кг·К; T – температура, К; λ – коэффициент теплопроводности, Вт/м·К.

Реологическое уравнение нелинейно-вязкой среды имеет вид реологической модели Карро (2).

Система уравнений (9) дополнена граничными условиями:

$$\Omega_1:\ \mathbf{u} = -u_0\mathbf{n}\ ,\ -\mathbf{n}\cdot\mathbf{q} = \rho\Delta H\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\ ;$$
$$\Omega_2:\ \mathbf{u} = 0\ ,\ -\mathbf{n}\cdot\mathbf{q} = \alpha(T_{oc} - T); \qquad (10)$$
$$\Omega_3:\ \left[-P\mathbf{I} + \mathbf{K}\right]\mathbf{n} = P_{\text{àò}\,i}\,\mathbf{n}\ ,\ -\mathbf{n}\cdot\mathbf{q} = 0$$

где u_0 – скорость входного потока, м/с; $\mathbf{n}$ – вектор нормали к соответствующей границе расчетной области; $\mathbf{q}$ – плотность теплового потока; ΔH – изменение энтальпии, Дж/кг; T_{oc} – температура термостатирующей жидкости (воды), омывающей капилляр, К; α – коэффициент теплоотдачи от конфетной массы к термостатирующей жидкости без учета тепловой инерционности стенки капилляра Вт/м²·К; $P_{атм}$ – атмосферное давление, Па.

Изменение энтальпии ΔH зависит от разности температур и давлений:

$$\Delta H = \int_{T_{вх}}^{T} c_p dT + \int_{P_{вх}}^{P_{атм}} \frac{1}{\rho}\left(1 - \alpha_{расш} T\right) dP, \qquad (11)$$

где $\alpha_{расш}$ – температурный коэффициент объемного расширения, К⁻¹; $T_{вх}$, $P_{вх}$ – температура и давление во входном потоке, К и Па соответственно.

Удельная теплоемкость, плотность и коэффициент теплопроводности конфетной массы, в зависимости от температуры, определяются уравнениями:

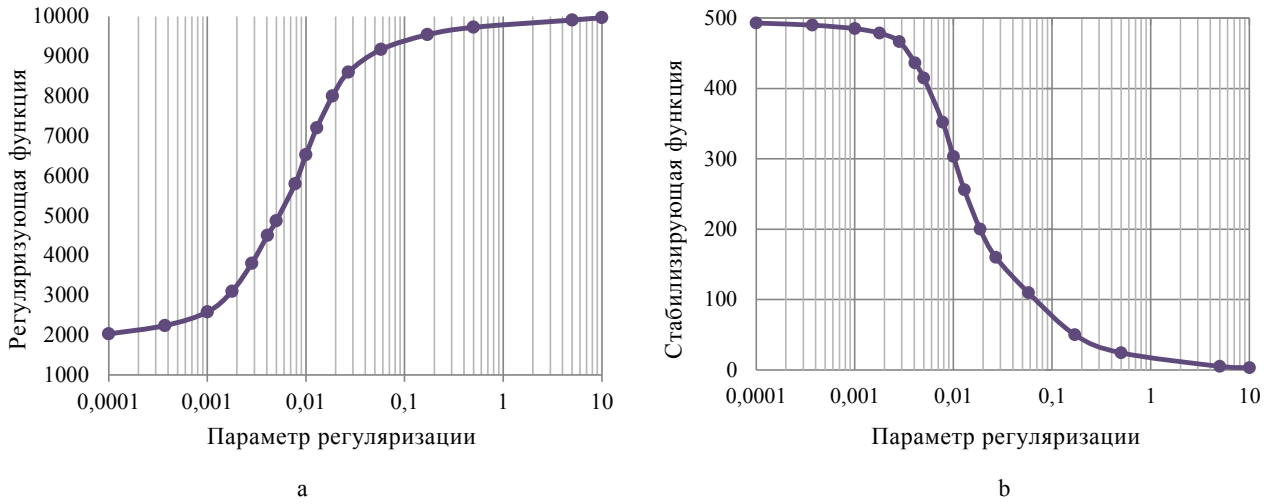
$$c_p = -3782{,}1 + 18{,}708T; \qquad (12)$$
$$\rho = 1969{,}9 - 1{,}952T; \qquad (13)$$
$$\lambda = 0{,}6205 - 0{,}0008T \qquad (14)$$

Верификация CFD-модели (9) с учетом граничных условий (10) проведена в вычислительном пакете ANSYS по следующим исходным данным: геометрические размеры капилляра (диаметр и длина), а также значения объемных расходов конфетной массы через капилляр соответствовали параметрам, использованных в капиллярной вискозиметрии; температура конфетной массы и термостатирующей жидкости $T = 333{,}15$ К и $T_{oc} = 293{,}15$ К соответственно; коэффициент теплоотдачи от конфетной массы к термостатирующей жидкости $\alpha = 5$ Вт/м²·К; температурный коэффициент объемного расширения $\alpha_{расш} = 2{,}5\times10^{-4}$ К⁻¹.

Вычислительный эксперимент проведен в соответствии с представленным выше алгоритмом в интервале изменения параметра регуляризации $1\times10^{-4} \le \alpha \le 10$. Значения вектора реологических параметров $\boldsymbol{\beta}_\alpha$ (при фиксированном α) определялись из условия минимизации параметрической функции (6). Поскольку целевая функция (6) может иметь несколько экстремумов, был использован комбинированный метод случайного поиска, заключающийся в локализации области существования глобального минимума целевой функции методом сканирования на равномерной сетке переменных и последующего уточнения в локализованной области значения вектора реологических параметров $\boldsymbol{\beta}_\alpha$ методом статистического градиента [23].

На рисунке 3 представлены зависимости регуляризующей $F_1(\boldsymbol{\beta})$ (a) и стабилизирующей $F_2(\boldsymbol{\beta})$ (b) функций от параметра регуляризации α.

Соотношение между регуляризующей и стабилизирующей функциями для фиксированных значений параметра регуляризации α представлено на рисунке 4. Построенный в логарифмических координатах график имеет характерный L-образный вид с ярко выраженными горизонтальной и вертикальной ветвями. Горизонтальная ветвь L-кривой соответствует решениям, при которых величина регуляризующей невязки $F_1(\boldsymbol{\beta})$ более чувствительна к изменениям параметра регуляризации. Вертикальная ветвь соответствует решениям, в которых величина стабилизирующей невязки $F_2(\boldsymbol{\beta})$



a b

Рисунок 3. Зависимость регуляризующей (a) и стабилизирующей (b) функций от параметра регуляризации

Figure 3. Effect of the regularization parameter on the regularizing (a) and stabilizing (b) functions

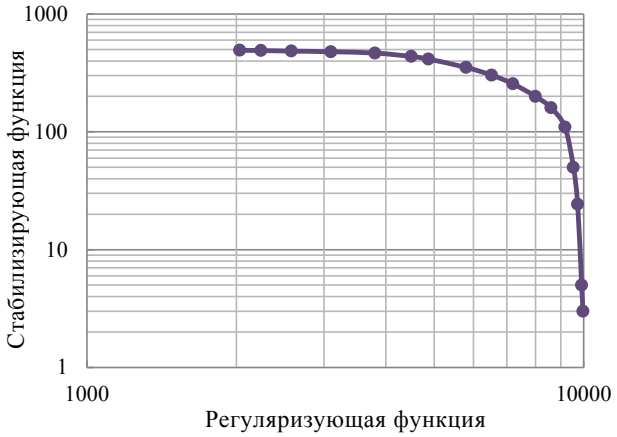


Рисунок 4. *L*-кривая

Figure 4. *L*-curve

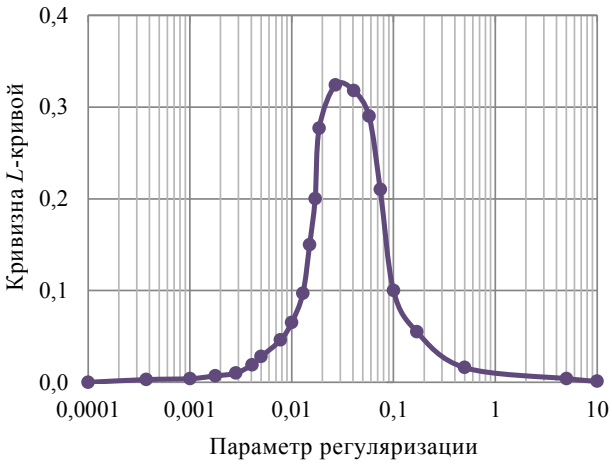


Рисунок 5. Зависимость кривизны *L*-кривой от параметра регуляризации

Figure 5. Effect of regularization parameter on *L*-curve

наиболее чувствительна к изменениям параметра регуляризации. Таким образом, *L*-кривая показывает оптимум между параметрической идентификаций по результатам ротационной вискозиметрии и коррекцией по CFD-модели по данным капиллярной вискозиметрии.

Оптимальное значение параметра регуляризации α^* соответствует вершине сглаженного угла между горизонтальной и вертикальной ветвями *L*-кривой, который показывает величину кривизны $k(\alpha)$ кривой (рис. 5) [17].

Решением экстремальной задачи (8) является оптимальное значение параметра регуляризации $\alpha^* = 0,027$, при котором достигается максимальная кривизна $k(\alpha)$ неявно заданной функции. При оптимальном значении $\alpha^* = 0,027$ коэффициенты реологической модели Карро равны: $\mu_0 = 16054,5$ Па·с, $\mu_\infty = 1,04$ Па·с, $\lambda = 155,6$ с, $n = 0,301$.

На рисунке 6 в логарифмических координатах представлены экспериментальные данные сдвиговой вискозиметрии помадной массы (графические пиктограммы) и полная реологическая кривая, построенная по уравнению Карро (2). Видно, что в диапазоне скоростей сдвига от 0,47 до 669,7 с$^{-1}$, который соответствует диапазону экспериментальных исследований, наблюдается удовлетворительное согласие между экспериментальными значениями вязкости и расчетными, предсказанными по модели Карро. Максимальная относительная ошибка предсказания вязкости по уравнению Карро составила 14,07 % для ротационной вискозиметрии и 9,17 % для капиллярной вискозиметрии.

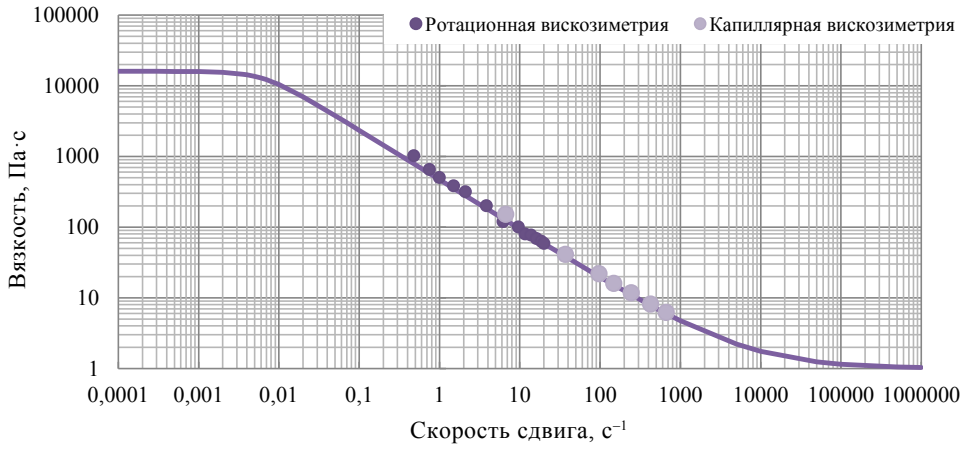


Рисунок 6. Полная реологическая кривая помадной конфетной массы

Figure 6. Complete rheological curve for fondant mass

Характер расположения экспериментальных точек вдоль линейного участка (в логарифмических координатах) полной реологической кривой свидетельствует об инвариантности методов ротационной и капиллярной вискозиметрии [2, 3, 10, 11].

Полная реологическая кривая $\mu(\dot{\gamma})$ омадной конфетной массы (рис. 6) имеет вид, характерный для структурированных жидкообразных сред, проявляющих аномалию вязкости и обладающих двумя уровнями постоянной (ньютоновской) вязкости. Для объяснения аномально-вязкого поведения жидкообразных структур предложено большое число теорий, использующие различные механические и физические гипотезы и представления для описания реологического поведения структурированных жидкостей. Е. А. Кирсанов и В. Н. Матвеенко в своей работе приводят описание десяти наиболее известных и распространенных концепций, принятых для объяснения реологического поведения дисперсных систем [2]. Г. В. Виноградов и А. Я. Малкин все известные теории аномалии вязкости условно делят на три большие группы («Реология полимеров», 1977): кинетическая, структурная и гидродинамическая теории.

Кинетическая теория Г. Эйринга и его последователей связывает явление аномалии вязкости с влиянием напряжения или скорости сдвига на высоту потенциального барьера, который препятствует переходу молекулярно-кинетических единиц из одного равновесного положения в другое. В основе структурной теории аномалии вязкости лежат представления П. А. Ребиндера о влиянии напряжения или скорости сдвига на процессы тиксотропного разрушения и восстановления структуры системы без учета природы взаимодействия частиц, образующих эту структуру. Согласно гидродинамическим теориям уменьшение вязкости при увеличении скорости или напряжения сдвига объясняется изменением формы макромолекул и гидродинамическими эффектами, возникающими при их движении в жидкости.

Несмотря на то, что в основе этих теорий лежат различные явления и механизмы объяснения аномалии вязкости, они не являются противоречащими или взаимоисключающими. Напротив, они дополняют друг друга и позволяют рассматривать аномально-вязкое поведение структурированных жидких сред на различных уровнях.

Помадная масса представляет собой высокодисперсную концентрированную структурированную систему, состоящую из раздробленной дисперсной фазы, окруженной дисперсионной средой. Частицы твердой фазы, взаимодействуя друг с другом через прослойки дисперсионной среды, образуют пространственную упорядоченную структуру преимущественно коагуляционного типа отличительными особенностями являются невысокая прочность, пластичность, способность к ползучести и тиксотропия [1].

Согласно воззрениям П. А. Ребиндера аномально-вязкое стационарное течение жидкообразных сред представляется как итог двух конкурирующих процессов в каждый момент времени: разрушение связей в составе пространственной структурной сетки и тиксотропного восстановления части этих разорванных связей в результате теплового (броуновского) движения частиц структуры при одновременном действии на них внешнего сдвигающего усилия. При отсутствии внешней сдвигающей силы пространственная структура помадной массы равнопрочна во всех направлениях. При одномерном сдвиге приложение внешней сдвигающей силы, не превышающей предела прочности пространственной структуры, вызывает упорядочение пространственной сетки структуры. При этом выделяются связи между частицами продольные, ориентированные по направлению действия силы, и связи поперечные, перпендикулярные к данному направлению. Поперечные связи, препятствующие сдвигу слоев жидкообразной среды, разрушаются. Однако при малой скорости сдвига разорванные поперечные связи успевают восстановиться под влиянием броуновского движения. Структурированная среда в этом случае течет как ньютоновская с вязкостью μ_0 наибольшая вязкость практически неразрушенной структуры. Дальнейшее увеличение прикладываемого напряжения сдвига (скорости сдвига) приводит к увеличению числа разрушенных поперечных связей. При превышении предела прочности их число оказывается больше числа связей, восстановленных под действием броуновского движения. Частицы, освобожденные от поперечных связей, преодолевая силы отталкивания соседних частиц, встраиваются в продольные цепочки, упрочняя их. Влияние броуновского движения на частицы цепочки заметно убывает, течение происходит с меньшей вязкостью. При дальнейшем увеличении сдвигающего напряжения (скорости сдвига) плотность упаковки частиц в продольных цепочках повышается с одновременным увеличением ее прочности. При некотором критическом значении напряжения сдвига достигнутая цепочками прочность настолько велика, что в нее не могут встроиться частицы из поперечных связей. Кроме того, число частиц, оставшихся в поперечных связях, мало. Поэтому переход их в продольные цепочки является маловероятным. С этого момента структурированная жидкость вновь течет как ньютоновская, но уже с вязкостью μ_∞ – наименьшая вязкость предельно разрушенной структуры. Иными словами, жидкообразная структура с вязкостью μ_∞ образована предельно упорядоченными частицами, образующими продольные цепочки. После снятия внешнего сдвигающего воздействия прослойки между частицами продольных цепочек расширяются. При этом продольные цепочки удлиняются и искривляются. Связи между частицами цепочки ослабляются, что облегчает работу броуновскому движению. Под действием оставшихся частиц,

образующих поперечные связи, а также броуновского движения происходит разрушение уже продольных связей и полное тиксотропное восстановление структуры жидкообразной среды.

Концепция П. Я. Ребиндера, хотя и связывает аномалию вязкости с изменением структуры системы при ее деформировании, не учитывает природу взаимодействия частиц системы и не позволяет в аналитическом виде установить зависимость вязкости от скорости или напряжения сдвига.

Формализация зависимости вязкости структурированной жидкообразной системы от условий ее течения возможна с позиций кинетической теории Эйринга (Н. В. Михайлов и А. М. Лихтгейм (1955 г.) Г. М. Бартенев (1955 г.), Е. Е. Бибик (1981 г.)). Согласно Эйрингу вязкость неньютоновской жидкости убывает с ростом напряжения сдвига в соответствии с законом

$$\mu = \frac{\tau}{4\nu_0 \mathrm{sh}\left(\frac{\tau\omega}{kT}\right)} \qquad (15)$$

где τ – напряжение сдвига; ν_0 – частота перескоков молекулярно-кинетической единицы жидкости в единицу времени при отсутствии внешнего сдвигающего усилия; ω – эффективный объем молекулярно-кинетической единицы; k – постоянная Больцмана; T – температура.

При напряжении сдвига, стремящегося к бесконечно малому значению, справедлива эквивалентность $\mathrm{sh}\left(\frac{\tau\omega}{kT}\right)\Big|_{\tau\to 0} \sim \frac{\tau\omega}{kT}$. В этом случае (15) запишется как

$$\mu = \mu_0 = \frac{kT}{4\nu_0\omega} \qquad (16)$$

Это подтверждает тот факт, что вязкость структурированной жидкообразной среды при скорости сдвига, стремящейся к нулю, не зависит от напряжения сдвига и принимает свое максимальное конечное значение (наибольшая вязкость практически неразрушенной структуры).

Выводы

В работе показано, что степенное реологическое уравнение Оствальда-де Виля является физически некорректным при предсказаниях значений вязкости в предельных случаях. При решении задач ламинарных пространственных течений нелинейно-вязких сред в изотермической и неизотермической постановках использование степенного уравнения Оствальда-де Виля сопряжено с вычислительными проблемами, которые приводят к существенным погрешностям. Для устранения вычислительных проблем предложено использовать реологическое уравнение Карро, учитывающее предельные ньютоновские состояния нелинейно-вязкой среды.

Анализ показал, что существующие методы и приборное оформление сдвиговой вискозиметрии неньютоновских сред не позволяют оценить предельные значения вязкости. В этой связи для параметрической идентификации реологической модели Карро предложено использовать модифицированный алгоритм регуляризации Тихонова. Согласно алгоритму регуляризованное решение (в виде вектора реологических параметров) получается в результате достижения баланса между предпочтительным выбором результатов ротационной вискозиметрии и коррекцией результатов по CFD-модели течения структурированной жидкообразной среды в измерительной системе вискозиметра.

Для реализации алгоритма регуляризации формализована CFD-модель течения нелинейно-вязкой среды с уравнением Карро в цилиндрическом капилляре. CFD-модель составлена на основе уравнений сохранения массы, энергии и импульса и дополнена соотношениями, определяющими граничные условия и температурные зависимости теплофизических свойств среды.

На примере помадной массы кондитерского производства, проявляющей неньютоновские свойства, показана процедура идентификации параметров реологического уравнения Карро. Полученное уравнение предсказывает вязкость помадной массы с ошибкой, не превышающей 14,07 %, и позволяет устранить вычислительные проблемы, характерные для реологической модели Оствальда-де Виля, возникающие при решении задач ламинарных пространственных течений нелинейно-вязких сред в изотермической и неизотермической постановках.

Критерии авторства

Авторы в равной степени участвовали в подготовке и написании статьи.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Contribution

All the authors bear equal responsibility for the content of the article.

Conflict of interest

The authors declare that there is no conflict of interest regarding the publication of this article.

Список литературы

1. Муратова Е. И., Смолихина П. М. Реология кондитерских масс. Тамбов: Тамбовский государственный технический университет, 2013. 188 с.

2. Matveenko V. N., Kirsanov E. A. Structural rationale of a non-Newtonian flow // Moscow University Chemistry Bulletin. 2017. Vol. 72. № 2. P. 69–91. https://doi.org/10.3103/S0027131417020031.

3. Toledo R. T., Singh R. K., Kong F. Fundamentals of food process engineering. Cham: Springer, 2018. 449 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-90098-8.

4. Березовский Ю. М., Андреев В. Н. Формирование структур пищевых масс и формование готовых изделий. М.: ООО «НИПКЦ Восход-А», 2017. 162 с.

5. Heldman D. R., Lund D. B., Sabliov C. M. Handbook of food engineering. Boca Raton: CRC Press, 2019. 1206 p. https://doi.org/10.1201/9780429449734.

6. Рыльцев И. А., Рыльцева К. Е., Шрагер Г. Р. Кинематика течения степенной жидкости в трубе переменного сечения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 63. С. 125–138. https://doi.org/10.17223/19988621/63/11.

7. Литвинов К. В. Моделирование неизотермического течения аномально вязкой жидкости в каналах с различной геометрией границ // Моделирование и анализ информационных систем. 2016. Т. 23. № 3. С. 326–333. https://doi.org/10.18255/1818-1015-2016-3-326-333.

8. Matvienko O. V., Aseeva A. E. Mathematical simulation of the swirling flow of a thermoviscous, pseudoplastic sisco fluid in a cylindrical channel // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2020. Vol. 93. № 4. P. 827–838. https://doi.org/10.1007/s10891-020-02185-6.

9. Baranov A. V. Influence of temperature and pressure on viscoelastic fluid flow in a plane channel // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2020. Vol. 93. № 5. P. 1296–1302. https://doi.org/10.1007/s10891-020-02234-0.

10. Shapovalov V. M. A comparative analysis of the Ostwald-De Waele and Ellis rheological equations in solving the Graetz-Nusselt problem // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2019. Vol. 92. № 6. P. 1603–1611. https://doi.org/10.1007/s10891-019-02080-9.

11. Osswald T., Rudolph N. Polymer rheology: Fundamentals and applications. Munich: Hanser Publishers, 2015. 237 p.

12. Walicka A. Simple flows of pseudoplastic fluids based on dehaven model // International Journal of Applied Mechanics and Engineering. 2017. Vol. 22. № 4. P. 1035–1044. https://doi.org/10.1515/ijame-2017-0066.

13. Hasan W., Khan M. N. Rheological characterization of vegetable oil blends: Effect of shear rate, temperature, and short-term heating // Journal of Food Process Engineering. 2020. Vol. 43. № 6. https://doi.org/10.1111/jfpe.13396.

14. Sochi T. Analytical solutions for the flow of Carreau and Cross fluids in circular pipes and thin slits // Rheologica Acta. 2015. Vol. 54. № 8. P. 745–746. https://doi.org/10.1007/s00397-015-0863-x.

15. Пащенко Д. И., Наплеков И. С. CFD-моделирование характеристик парового эжектора для разогрева нефти и нефтепродуктов ANSYS // Экспозиция Нефть Газ. 2018. Т. 62. № 2. С. 54–56.

16. Kirsch A. An introduction to the mathematical theory of inverse problems. Cham: Springer, 2021. 400 p. https://doi.org/10.1007/978-3-030-63343-1.

17. Ладовский И. В., Гемайдинов Д. В. О методе регуляризации для расчета параметров сглаживающего фильтра при аналитическом продолжении потенциальных полей // Уральский геофизический вестник. 2018. Т. 33. № 3. С. 30–37. https://doi.org/10.25698/UGV.2018.3.5.30.

18. Сизиков В. С., Степанов А. В. Способ обучающих примеров в решении обратных некорректных задач спектроскопии // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2015. Т. 15. № 6. С. 1147–1154. https://doi.org/10.17586/2226-1494-2015-15-6-1147-1154.

19. Guha A., Schoegl I. Tomographic laser absorption spectroscopy using Tikhonov regularization // Applied Optics. 2014. Vol. 53. № 34. P. 8095–8103. https://doi.org/10.1364/AO.53.008095.

20. Kabanikhin S. I., Krivorotko O. I. Optimization methods for solving inverse immunology and epidemiology problems // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2020. Vol. 60. № 4. P. 580–589. https://doi.org/10.1134/S0965542520040107.

21. Duda P. Solution of inverse heat conduction problem using the Tikhonov regularization method // Journal of Thermal Science. 2017. Vol. 26. № 1. P. 60–65. https://doi.org/10.1007/s11630-017-0910-2.

22. Interpretation of impedance spectra of solid oxide fuel cells: L-curve criterion for determination of regularization parameter in distribution function of relaxation times technique / M. B. Choi [et al.] // JOM. 2019. Vol. 71. № 11. P. 3825–3834. https://doi.org/10.1007/s11837-019-03762-8.

23. Ширяев В. И. Исследование операций и численные методы оптимизации. М.: Ленанд, 2017. 219 с.

24. Математическое моделирование гидродинамики и теплообмена в движущих жидкостях / И. В. Кудинов [и др.]. СПб.: Лань, 2019. 208 с.

References

1. Muratova EI, Smolikhina PM. Reologiya konditerskikh mass [Rheology of confectionery masses]. Tambov: Tambov State Technical University; 2013. 188 p. (In Russ.).

2. Matveenko VN, Kirsanov EA. Structural rationale of a non-Newtonian flow. Moscow University Chemistry Bulletin. 2017;72(2):69–91. https://doi.org/10.3103/S0027131417020031.

3. Toledo RT, Singh RK, Kong F. Fundamentals of food process engineering. Cham: Springer; 2018. 449 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-90098-8.

4. Berezovskiy YuM, Andreev VN. Formirovanie struktur pishchevykh mass i formovanie gotovykh izdeliy [Structures of food masses and finished products: formation and molding]. Moscow: Voskhod-A; 2017. 162 p. (In Russ.).

5. Heldman DR, Lund DB, Sabliov CM. Handbook of food engineering. Boca Raton: CRC Press; 2019. 1206 p. https://doi.org/10.1201/9780429449734.

6. Ryltsev IA, Ryltseva KE, Shrager GR. Kinematics of a power-law fluid flow in a pipe with a varying cross section. Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics. 2020;(63):125–138. (In Russ.). https://doi.org/10.17223/19988621/63/11.

7. Litvinov KV. Modelling of non-isothermal flow abnormally viscous fluid in the channels with various geometry of boundaries. Modeling and Analysis of Information Systems. 2016;23(3):326–333. (In Russ.). https://doi.org/10.18255/1818-1015-2016-3-326-333.

8. Matvienko OV, Aseeva AE. Mathematical simulation of the swirling flow of a thermoviscous, pseudoplastic sisco fluid in a cylindrical channel. Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2020;93(4):827–838. https://doi.org/10.1007/s10891-020-02185-6.

9. Baranov AV. Influence of temperature and pressure on viscoelastic fluid flow in a plane channel. Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2020;93(5):1296–1302. https://doi.org/10.1007/s10891-020-02234-0.

10. Shapovalov VM. A comparative analysis of the Ostwald-De Waele and Ellis rheological equations in solving the Graetz-Nusselt problem. Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2019;92(6):1603–1611. https://doi.org/10.1007/s10891-019-02080-9.

11. Osswald T, Rudolph N. Polymer rheology: Fundamentals and applications. Munich: Hanser Publishers; 2015. 237 p.

12. Walicka A. Simple flows of pseudoplastic fluids based on dehaven model. International Journal of Applied Mechanics and Engineering. 2017;22(4):1035–1044. https://doi.org/10.1515/ijame-2017-0066.

13. Hasan W, Khan MN. Rheological characterization of vegetable oil blends: Effect of shear rate, temperature, and short-term heating. Journal of Food Process Engineering. 2020;43(6). https://doi.org/10.1111/jfpe.13396.

14. Sochi T. Analytical solutions for the flow of Carreau and Cross fluids in circular pipes and thin slits. Rheologica Acta. 2015;54(8):745–746. https://doi.org/10.1007/s00397-015-0863-x.

15. Pashchenko DI, Naplekov IS. CFD modeling of properties of steam ejector for oil and oil product heating in ANSYS. Exposition Oil Gas. 2018;62(2):54–56. (In Russ.).

16. Kirsch A. An introduction to the mathematical theory of inverse problems. Cham: Springer; 2021. 400 p. https://doi.org/10.1007/978-3-030-63343-1.

17. Ladovskiy IV, Gemaidinov DV. About the method of regularization for calculating the parameters of a smoothing filter for upward and downward potential fields continuation. Ural'skiy geofi ziceskiy vestnik. 2018;33(3):30–37. (In Russ.). https://doi.org/10.25698/UGV.2018.3.5.30.

18. Sizikov VS, Stepanov AV. Method of training examples in solving inverse ill-posed problems of spectroscopy. Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics. 2015;15(6):1147–1154. (In Russ.). https://doi.org/10.17586/2226-1494-2015-15-6-1147-1154.

19. Guha A, Schoegl I. Tomographic laser absorption spectroscopy using Tikhonov regularization. Applied Optics. 2014;53(34):8095–8103. https://doi.org/10.1364/AO.53.008095.

20. Kabanikhin SI, Krivorotko OI. Optimization methods for solving inverse immunology and epidemiology problems. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2020;60(4):580–589. https://doi.org/10.1134/S0965542520040107.

21. Duda P. Solution of inverse heat conduction problem using the Tikhonov regularization method. Journal of Thermal Science. 2017;26(1):60–65. https://doi.org/10.1007/s11630-017-0910-2.

22. Choi MB, Shin J, Ji H-I, Kim H, Son J-W, Lee J-H, et al. Interpretation of impedance spectra of solid oxide fuel cells: L-curve criterion for determination of regularization parameter in distribution function of relaxation times technique. JOM. 2019;71(11):3825–3834. https://doi.org/10.1007/s11837-019-03762-8.

23. Shiryaev VI. Issledovanie operatsiy i chislennye metody optimizatsii [Operational research and numerical optimization methods]. Moscow: Lenand; 2017. 219 p. (In Russ.).

24. Kudinov IV, Kudinov VA, Eremin AV, Kolesnikov SV. Matematicheskoe modelirovanie gidrodinamiki i teploobmena v dvizhushchikh zhidkostyakh [Mathematical modeling of hydrodynamics and heat transfer in moving fluids]. St. Petersburg: Lan′; 2019. 208 p. (In Russ.).